Ekonometryczne modele nieliniowe

Wykład 6

Modele progowe c.d.

Literatura

Testing for two-regime threshold cointegration in vector error-correction models

Bruce E. Hansen[a, *], Byeongseon Seo[b]

Journal of Econometrics 110 (2002) 293–318

Testing and Modeling Threshold Autoregressive Processes
Author(s): Ruey S. Tsay
Source: *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 84, No. 405 (Mar., 1989), pp. 231-240

Testing and Modeling Multivariate Threshold Models
Author(s): Ruey S. Tsay
Source: *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 93, No. 443 (Sep., 1998), pp. 1188-1202

Test Tsaya (1989)

- Model TAR z wieloma reżimami:

$$Y_t = \Phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i^{(j)} Y_{t-i} + a_t^{(j)},$$

$$r_{j-1} \leq Y_{t-d} < r_j,$$

- Po posortowaniu obserwacji względem zmiennej progowej (dla 2 reżimów):

$$\begin{aligned} Y_{\pi_i+d} &= \Phi_0^{(1)} + \sum_{v=1}^{p} \Phi_v^{(1)} Y_{\pi_i+d-v} + a_{\pi_i+d}^{(1)} \quad \text{if } i \leq s \\ &= \Phi_0^{(2)} + \sum_{v=1}^{p} \Phi_v^{(2)} Y_{\pi_i+d-v} + a_{\pi_i+d}^{(2)} \quad \text{if } i > s, \end{aligned}$$

where s satisfies $Y_{\pi_s} < r_1 \leq Y_{\pi_{s+1}}$

Test Tsaya (1989) c.d.

- Rekursywna estymacja parametrów (obserwacja nr $m+1$):

$$\hat{\beta}_{m+1} = \hat{\beta}_m + K_{m+1}[Y_{d+\pi_{m+1}} - x'_{m+1}\hat{\beta}_m],$$

$$D_{m+1} = 1.0 + x'_{m+1}P_m x_{m+1},$$

$$P_m = (X_m' X_m)^{-1}$$

$$K_{m+1} = P_m x_{m+1}/D_{m+1},$$

$$P_{m+1} = \left(I - P_m \frac{x_{m+1}x'_{m+1}}{D_{m+1}}\right) P_m$$

- …i błędów prognozy

$$\hat{a}_{d+\pi_{m+1}} = Y_{d+\pi_{m+1}} - x'_{m+1}\hat{\beta}_m$$

$$\hat{e}_{d+\pi_{m+1}} = \hat{a}_{d+\pi_{m+1}}/\sqrt{D_{m+1}}.$$

Test Tsaya (1989) c.d.

- Oszacowanie dodatkowej regresji:

$$\hat{e}_{\pi_i+d} = \omega_0 + \sum_{v=1}^{p} \omega_v Y_{\pi_i+d-v} + \varepsilon_{\pi_i+d},$$

- H0: Model AR (parametry w regresji = 0)
- H1: Model TAR

$$\hat{F}(p, d) = \frac{\left(\sum \hat{e}_t^2 - \sum \hat{\varepsilon}_t^2\right)/(p+1)}{\sum \hat{\varepsilon}_t^2/(n-d-b-p-h)} \qquad \sim F$$

– $p+1$ – liczba parametrów w modelu AR

– $n\text{-}d\text{-}b\text{-}p\text{-}h$ – liczba obserwacji w dodatkowej regresji minus liczba parametrów

Modele TVAR, TVECM

- Model liniowy (VECM)

$$\Delta x_t = A' X_{t-1}(\beta) + u_t,$$

$$X_{t-1}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 \\ w_{t-1}(\beta) \\ \Delta x_{t-1} \\ \Delta x_{t-2} \\ \vdots \\ \Delta x_{t-l} \end{pmatrix}$$

$$w_t(\beta) = \beta' x_t \qquad \Sigma = \mathrm{E}(u_t u_t')$$

$$\tilde{u}_t = \Delta x_t - \tilde{A}' X_{t-1}(\tilde{\beta})$$

- Model progowy (TVECM)

$$\Delta x_t = \begin{cases} A_1' X_{t-1}(\beta) + u_t & \text{if } w_{t-1}(\beta) \leqslant \gamma, \\ A_2' X_{t-1}(\beta) + u_t & \text{if } w_{t-1}(\beta) > \gamma, \end{cases}$$

$$\Delta x_t = A_1' X_{t-1}(\beta) d_{1t}(\beta, \gamma) + A_2' X_{t-1}(\beta) d_{2t}(\beta, \gamma) + u_t,$$

$$d_{1t}(\beta, \gamma) = 1(w_{t-1}(\beta) \leqslant \gamma),$$

$$d_{2t}(\beta, \gamma) = 1(w_{t-1}(\beta) > \gamma)$$

Estymacja TVECM

- Maksymalizujemy funkcję wiarygodności

$$\mathscr{L}_n(A_1, A_2, \Sigma, \beta, \gamma) = -\frac{n}{2}\log|\Sigma| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} u_t(A_1, A_2, \beta, \gamma)'\Sigma^{-1}u_t(A_1, A_2, \beta, \gamma),$$

$$u_t(A_1, A_2, \beta, \gamma) = \Delta x_t - A_1' X_{t-1}(\beta) d_{1t}(\beta, \gamma) - A_2' X_{t-1}(\beta) d_{2t}(\beta, \gamma)$$

  – Załóżmy, że wektor kointegrujący i parametr progowy są znane…

$$\hat{A}_1(\beta, \gamma) = \left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}(\beta) X_{t-1}(\beta)' d_{1t}(\beta, \gamma)\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}(\beta) \Delta x_t' d_{1t}(\beta, \gamma)\right)$$

$$\hat{A}_2(\beta, \gamma) = \left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}(\beta) X_{t-1}(\beta)' d_{2t}(\beta, \gamma)\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}(\beta) \Delta x_t' d_{2t}(\beta, \gamma)\right)$$

$$\hat{u}_t(\beta, \gamma) = u_t(\hat{A}_1(\beta, \gamma), \hat{A}_2(\beta, \gamma), \beta, \gamma) \qquad \hat{\Sigma}(\beta, \gamma) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t(\beta, \gamma)\hat{u}_t(\beta, \gamma)'$$

Estymacja TVECM

- Szukamy wartości parametru progowego i wektora kointegrującego
  - „concentrated likelihood function”:

$$\mathscr{L}_n(\beta,\gamma) = \mathscr{L}_n(\hat{A}_1(\beta,\gamma), \hat{A}_2(\beta,\gamma), \hat{\Sigma}(\beta,\gamma), \beta, \gamma)$$
$$= -\frac{n}{2}\log|\hat{\Sigma}(\beta,\gamma)| - \frac{np}{2}.$$

  - „grid search”

$$(\beta,\gamma)$$

Estymacja TVECM

298 B.E. Hansen, B. Seo / Journal of Econometrics 110 (2002) 293–318

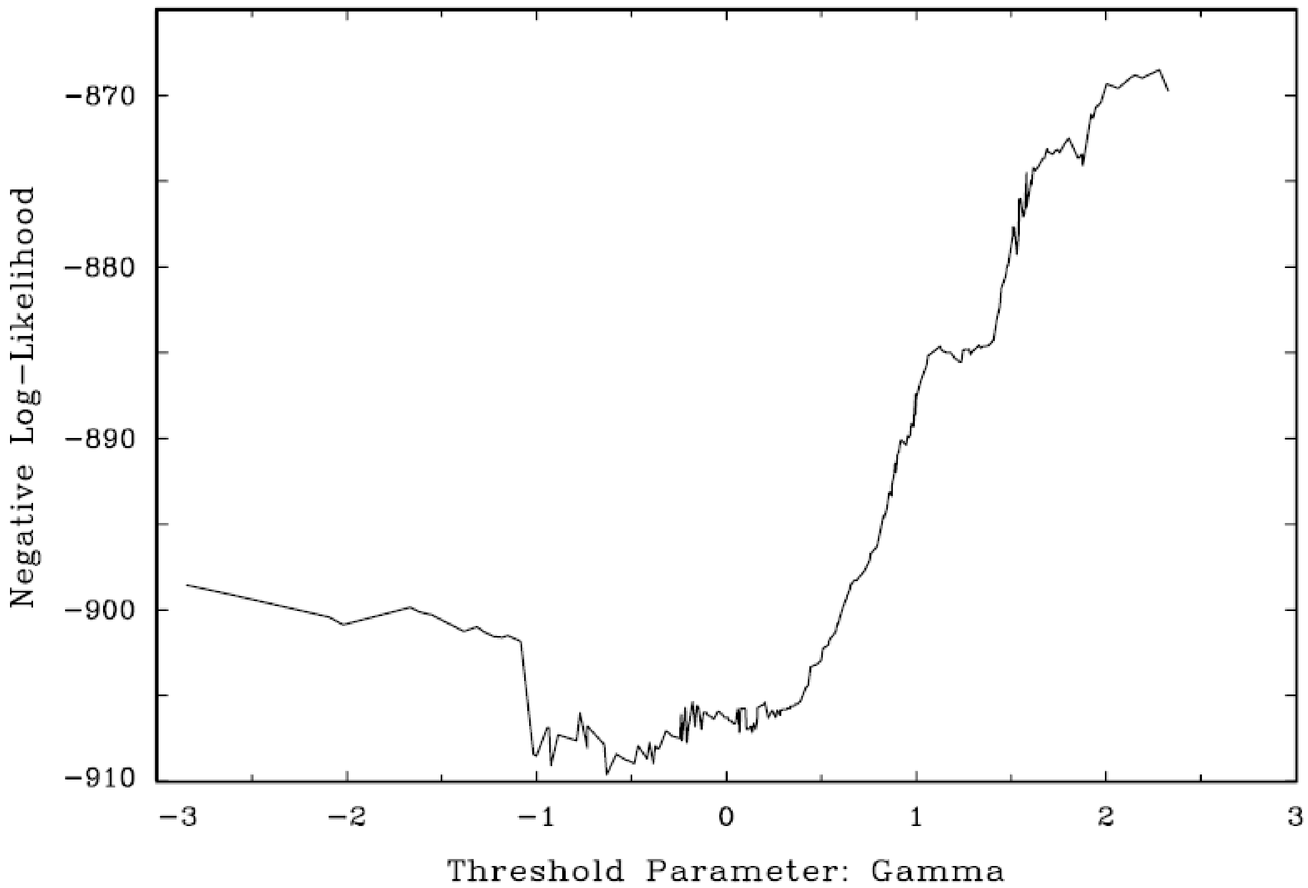

Fig. 1. Concentrated negative log likelihood.

Procedura estymacji

- Hansen, Seo (2002):

1. Form a grid on $[\gamma_L, \gamma_U]$ and $[\beta_L, \beta_U]$ based on the linear estimate $\tilde{\beta}$ as described above.
2. For each value of (β, γ) on this grid, calculate $\hat{A}_1(\beta, \gamma)$, $\hat{A}_2(\beta, \gamma)$, and $\hat{\Sigma}(\beta, \gamma)$ as defined in (4), (5), and (6), respectively.
3. Find $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$ as the values of (β, γ) on this grid which yields the lowest value of $\log|\hat{\Sigma}(\beta, \gamma)|$.
4. Set $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$, $\hat{A}_1 = \hat{A}_1(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$, $\hat{A}_2 = \hat{A}_2(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$, and $\hat{u}_t = \hat{u}_t(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$.

- brak teorii dla zgodności estymatorów i asymptotycznej normalności

Testowanie: TVECM czy VECM

- H0: VECM
- H1: TVECM
- Test LM

$$\mathrm{LM}(\beta,\gamma) = \mathrm{vec}(\hat{A}_1(\beta,\gamma) - \hat{A}_2(\beta,\gamma))'(\hat{V}_1(\beta,\gamma) + \hat{V}_2(\beta,\gamma))^{-1} \times \mathrm{vec}(\hat{A}_1(\beta,\gamma) - \hat{A}_2(\beta,\gamma)).$$

Testowanie…

- techniczne wyprowadzenia wyrażeń w LM
  - Macierze wariancji dla: $\operatorname{vec}\hat{A}_1(\beta,\gamma)$
    $\operatorname{vec}\hat{A}_2(\beta,\gamma)$

$$\hat{V}_1(\beta,\gamma) = M_1(\beta,\gamma)^{-1}\Omega_1(\beta,\gamma)M_1(\beta,\gamma)^{-1}$$

$$\hat{V}_2(\beta,\gamma) = M_2(\beta,\gamma)^{-1}\Omega_2(\beta,\gamma)M_2(\beta,\gamma)^{-1}$$

$$\Omega_1(\beta,\gamma) = \xi_1(\beta,\gamma)'\xi_1(\beta,\gamma),$$

$$\Omega_2(\beta,\gamma) = \xi_2(\beta,\gamma)'\xi_2(\beta,\gamma).$$

$$M_1(\beta,\gamma) = I_p \otimes X_1(\beta,\gamma)'X_1(\beta,\gamma),$$

$$M_2(\beta,\gamma) = I_p \otimes X_2(\beta,\gamma)'X_2(\beta,\gamma)$$

$\xi_2(\beta,\gamma)$ macierz z ustawionych na sobie wektorów $\tilde{u}_t \otimes X_{t-1}(\beta)d_{2t}(\beta,\gamma)$

… podobnie jak $X_2(\beta,\gamma)$

z $X_{t-1}(\beta)d_{2t}(\beta,\gamma)$

Testowanie…

$$\mathrm{SupLM} = \sup_{\gamma_L \leqslant \gamma \leqslant \gamma_U} \mathrm{LM}(\tilde{\beta}, \gamma).$$

- Procedura „fixed regressor bootstrap”

  $y_{bt} = \tilde{u}_t e_{bt}$ e z rozkładu N(0,1)

  – wektor kointegrujący i inne zmienne objaśniające – stałe wartości w symulacjach
  – Test odporny na heteroskedastyczność nieznanego rodzaju

- Procedura „residual bootsprap”
  – Generowanie reszt i X (z modelu liniowego)

Test Tsaya (1998)

- Model VAR $$z_t = AX_t + \varepsilon_t,$$
- Sortowanie obserwacji według wartości zmiennej progowej (d – opóźnienie zmiennej progowej)

$$z_{t(i)+d} = AX_{t(i)+d} + \varepsilon_{t(i)+d}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Rekursywne błędy predykcji („predictive residuals")

$$\hat{\varepsilon}_{t(l+1)+d} = z_{t(l+1)+d} - \hat{A}_l X_{t(l+1)+d},$$

$$\hat{\eta}_{t(l+1)+d} = \frac{\hat{\varepsilon}_{t(l+1)+d}}{[1 + (X_{t(l+1)+d})' V_l (X_{t(l+1)+d})]^{0.5}},$$

$$V_l = [\textstyle\sum_{i=1}^{l} (X_{t(i)+d})(X_{t(i)+d})']^{-1}$$

Test Tsaya c.d.

- Regresja błędów predykcji na X

$$\hat{\eta}_{t(l+1)+d} = \Psi X_{t(l+1)+d} + \upsilon_{t(l+1)+d}, \qquad l = l_0, \ldots, n-1$$

$$S_0 = \frac{1}{n - l_0} \sum_{l=l_0}^{n-1} (\hat{\eta}_{t(l+1)+d})(\hat{\eta}_{t(l+1)+d})'$$

$$S_1 = \frac{1}{n - l_0} \sum_{l=l_0}^{n-1} (\hat{\upsilon}_{t(l+1)+d})(\hat{\upsilon}_{t(l+1)+d})'$$

- Statystyka

$$C(d) = [n - l_0 - (2m + 1)][\ln |S_0| - \ln |S_1|],$$

ma rozkład chi-kwadrat(w(w*m+1)) przy H0

  – w - liczba równań, m – liczba opóźnień w VAR