Metoda zmiennych instrumentalnych i uogólniona metoda momentów

Wykład 14

Literatura

- B. Hansen (2013) Econometrics, *strona internetowa autora*

Problem endogenicznych zmiennych objaśniających

- Zmiany stóp procentowych ➔ zmiany kursu walutowego ➔ zmiany stóp procentowych

- Dynamika kredytu ➔ wzrost gospodarczy ➔ dynamika kredytu

- Inwestycje OFE (zmiana portfeli OFE) ➔ zmiany cen akcji ➔ zmiana portfeli OFE

Problem endogenicznych zmiennych objaśniających

- Równanie „strukturalne”:

$$y_i = \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta} + e_i \qquad\qquad \mathbb{E}(\boldsymbol{x}_i e_i) \neq 0$$

x – wektor k-elementowy

- Estymator KMNK obciążony
- Rozwiązanie: MZI lub UMM

Zmienne instrumentalne

- Wykorzystanie zmiennych instrumentalnych, tzn. skorelowanych ze zmiennymi endogenicznymi ale nieskorelowanych z e:
  $\mathbb{E}\left(\boldsymbol{z}_i e_i\right) = \mathbf{0}$
- Zwykle część zmiennych jest egzogeniczna:

$$\boldsymbol{x}_i = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{1i} \\ \boldsymbol{x}_{2i} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \end{array} \end{array}$$

- …i może zostać zaliczona do zmiennych instrumentalnych:

$$\boldsymbol{z}_i = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{1i} \\ \boldsymbol{z}_{2i} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} k_1 \\ \ell_2 \end{array} \end{array}$$

Zmienne instrumentalne

- Przykłady:
  - Naturalne instrumenty (np. przelewy z ZUS do OFE)
  - Opóźnione zmienne endogeniczne
  - Identyfikacja przez heteroskedastyczność

Zmienne instrumentalne

- Jeżeli $\ell_2 = k_2$, to model „jednoznacznie identyfikowalny" (just-identified)
- Jeżeli $\ell_2 > k_2$, to model „przeidentyfikowany" (over-identified)

Uogólniona metoda momentów

- Generalized method of moments (GMM)
- Przykładowy model:

$$\begin{aligned} y_i &= x_i'\boldsymbol{\beta} + e_i \\ &= x_{1i}'\boldsymbol{\beta}_1 + x_{2i}'\boldsymbol{\beta}_2 + e_i \\ \mathbb{E}(x_i e_i) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Niech prawdziwa będzie restrykcja: $\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$
- MNK dla modelu $y_i = x_{1i}'\boldsymbol{\beta}_1 + e_i$ niekoniecznie efektywna, bo więcej restrykcji niż parametrów: $\ell - k = r$

  ➔ r „overidentifying restrictions”

Uogólniona metoda momentów

- Niech $\boldsymbol{g}(y, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})$ będzie funkcją ($\ell \times 1$) parametrów $\boldsymbol{\beta}$ $(k \times 1)$, $\ell \geq k$:

$$\mathbb{E}\boldsymbol{g}(y_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{\beta}_0) = \boldsymbol{0}$$

  – funkcja momentów, np.

$$\boldsymbol{g}(y, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{z} \cdot (y - \boldsymbol{x}_1' \boldsymbol{\beta}_1)$$

Uogólniona metoda momentów

- Policzmy odpowiednik na danych z próby:

$$\overline{\boldsymbol{g}}_n(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\left(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}\right) = \frac{1}{n}\left(\mathbf{Z}'\boldsymbol{y} - \mathbf{Z}'\mathbf{X}\,\boldsymbol{\beta}\right)$$

- Estymator momentów próbuje znaleźć takie $\boldsymbol{\beta}$, że $\overline{\boldsymbol{g}}_n(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$

- Niech $J_n(\boldsymbol{\beta}) = n \cdot \overline{\boldsymbol{g}}_n(\boldsymbol{\beta})'\mathbf{W}_n\,\overline{\boldsymbol{g}}_n(\boldsymbol{\beta})$ będzie miarą „długości” wektora $\overline{\boldsymbol{g}}_n(\boldsymbol{\beta})$

  gdzie: $\mathbf{W}_n > 0$ to macierz wag ($\ell \times \ell$)

Uogólniona metoda momentów

- Na przykład dla $\boldsymbol{W}_n = \boldsymbol{I}$

$$J_n(\boldsymbol{\beta}) = n \cdot \overline{\boldsymbol{g}}_n(\boldsymbol{\beta})' \overline{\boldsymbol{g}}_n(\boldsymbol{\beta}) = n \cdot \left\| \overline{\boldsymbol{g}}_n(\boldsymbol{\beta}) \right\|^2$$

- Estymator GMM (UMM):

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GMM} = \underset{\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{argmin}}\, J_n\left(\boldsymbol{\beta}\right)$$

Uogólniona metoda momentów

- Dla $k = \ell$ jest to estymator momentów $\overline{\boldsymbol{g}}_n(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0}$

- FOC: $$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} J_n(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= 2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \overline{\boldsymbol{g}}_n(\widehat{\boldsymbol{\beta}})' \mathbf{W}_n \overline{\boldsymbol{g}}_n(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= -2\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{Z}\right)\mathbf{W}_n\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z}'\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)\right)\end{aligned}$$

…czyli:

$$2\left(\mathbf{X}'\mathbf{Z}\right)\mathbf{W}_n\left(\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right)\widehat{\boldsymbol{\beta}} = 2\left(\mathbf{X}'\mathbf{Z}\right)\mathbf{W}_n\left(\mathbf{Z}'\boldsymbol{y}\right)$$

Uogólniona metoda momentów

- Definicja estymatora dla modelu liniowego:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GMM} = \left(\left(\mathbf{X}'\mathbf{Z}\right)\mathbf{W}_n\left(\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right)\right)^{-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{Z}\right)\mathbf{W}_n\left(\mathbf{Z}'\boldsymbol{y}\right)$$

- Efektywny estymator GMM dla $\mathbf{W}_0 = \boldsymbol{\Omega}^{-1}$

gdzie $\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i' e_i^2\right) = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_i'\right)$ $\quad \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{z}_i e_i$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}'\boldsymbol{y}$$

- Asymptotyczny rozkład estymatora:

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right) \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \left(\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Q}\right)^{-1}\right) \qquad \boldsymbol{Q} = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{x}_i'\right)$$

Estymacja macierzy wag

- Wybierz macierz startową: $\mathbf{W}_n = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}$
- Policz: $\hat{e}_i = y_i - \boldsymbol{x}_i'\widehat{\boldsymbol{\beta}}$

$$\hat{\boldsymbol{g}}_i = \boldsymbol{z}_i \hat{e}_i = \boldsymbol{g}(y_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i, \widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

- Policz: $\overline{\boldsymbol{g}}_n = \overline{\boldsymbol{g}}_n(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{g}}_i$

$$\hat{\boldsymbol{g}}_i^* = \hat{\boldsymbol{g}}_i - \overline{\boldsymbol{g}}_n$$

$$\mathbf{W}_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{g}}_i^* \hat{\boldsymbol{g}}_i^{*\prime}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{g}}_i \hat{\boldsymbol{g}}_i' - \overline{\boldsymbol{g}}_n \overline{\boldsymbol{g}}_n'\right)^{-1}$$

„Two-step” GMM

- Wzór dla modelu liniowego:

$$\widehat{\beta} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{Z} \left(\hat{\boldsymbol{g}}'\hat{\boldsymbol{g}} - n\overline{\boldsymbol{g}}_n\overline{\boldsymbol{g}}_n' \right)^{-1} \mathbf{Z}'\mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Z} \left(\hat{\boldsymbol{g}}'\hat{\boldsymbol{g}} - n\overline{\boldsymbol{g}}_n\overline{\boldsymbol{g}}_n' \right)^{-1} \mathbf{Z}'\boldsymbol{y}$$

- Błędy szacunku parametrów = pierwiastki z głównej przekątnej macierzy $\frac{1}{n}\widehat{\mathbf{V}}$

$$\widehat{\mathbf{V}} = n \left(\mathbf{X}'\mathbf{Z} \left(\hat{\boldsymbol{g}}'\hat{\boldsymbol{g}} - n\overline{\boldsymbol{g}}_n\overline{\boldsymbol{g}}_n' \right)^{-1} \mathbf{Z}'\mathbf{X} \right)^{-1}$$

Alternatywny estymator UMM

- Minimalizuj:

$$J(\boldsymbol{\beta}) = n \cdot \overline{\boldsymbol{g}}_n(\boldsymbol{\beta})' \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{g}_i^*(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{g}_i^*(\boldsymbol{\beta})' \right)^{-1} \overline{\boldsymbol{g}}_n(\boldsymbol{\beta})$$

$$\boldsymbol{g}_i^*(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{\beta}) - \overline{\boldsymbol{g}}_n(\boldsymbol{\beta})$$

„continuously-updated GMM estimator”

UMM dla modeli nieliniowych

- Minimalizuje: $J(\boldsymbol{\beta}) = n \cdot \overline{\boldsymbol{g}}_n(\boldsymbol{\beta})' \mathbf{W}_n \overline{\boldsymbol{g}}_n(\boldsymbol{\beta})$

$$\overline{\boldsymbol{g}}_n(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{\beta})$$

$$\mathbf{W}_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{g}}_i \hat{\boldsymbol{g}}_i' - \overline{\boldsymbol{g}}_n \overline{\boldsymbol{g}}_n' \right)^{-1}$$

- startuje: $\mathbf{W}_n = \boldsymbol{I}$
- możliwe wiele iteracji

UMM dla modeli nieliniowych

- Rozkład asymptotyczny estymatora:

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}\right) \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(\mathbf{0},\left(\boldsymbol{G}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{G}\right)^{-1}\right)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_i'\right)$$

$$\boldsymbol{G} = \mathbb{E}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}'}\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{\beta}).$$

- Wariancja szacunków parametrów:

$$\widehat{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\beta}} = \left(\hat{\boldsymbol{G}}'\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\hat{\boldsymbol{G}}\right)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = n^{-1}\sum_i \hat{\boldsymbol{g}}_i^*\hat{\boldsymbol{g}}_i^{*\prime} \qquad \hat{\boldsymbol{G}} = n^{-1}\sum_i \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}'}\boldsymbol{g}_i(\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

Testowanie „nadliczbowych” restrykcji

- Test of overidentifying restrictions:

$\mathbb{H}_0 : \mathbb{E}\boldsymbol{g}_i = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} J_n &= n\,\overline{\boldsymbol{g}}_n' \mathbf{W}_n \overline{\boldsymbol{g}}_n \\ &= n^2 \overline{\boldsymbol{g}}_n' \left(\hat{\boldsymbol{g}}' \hat{\boldsymbol{g}} - n \overline{\boldsymbol{g}}_n \overline{\boldsymbol{g}}_n'\right)^{-1} \overline{\boldsymbol{g}}_n \end{aligned}$$

$$J_n = J_n(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) \xrightarrow{d} \chi^2_{\ell-k}$$

- Wykrywa możliwe wady modelu:
słabe instrumenty, zbyt dużo instrumentów, zła postać modelu, itp.

Forma zredukowana modelu

- Sprawdźmy relację między x i z:

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{u}_i$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\right)^{-1}\mathbb{E}\left(\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{x}_i'\right)$$

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{u}_i') = \mathbf{0}$$

- Estymator MNK: $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}} = \left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right)$

Metoda zmiennych instrumentalnych

- Podstawmy tę relację do równania (1):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= (\mathbf{Z\Gamma} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e} \\ &= \mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{v}, \end{aligned}$$

gdzie: $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\beta}$ $\quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}$

- Zauważmy, że: $\mathbb{E}(z_i v_i) = \mathbb{E}\left(z_i \boldsymbol{u}_i'\right)\boldsymbol{\beta} + \mathbb{E}(z_i e_i) = \mathbf{0}$

…dlatego można zastosować MNK:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\lambda}} + \hat{\boldsymbol{v}}, \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} &= \left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}'\boldsymbol{y}\right) \end{aligned}$$

MZI i pośrednia MNK
($k = \ell$)

- MZI to szczególny przypadek UMM:

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \left(\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{W}_n\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{W}_n\mathbf{Z}'\boldsymbol{y} \\
&= \left(\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{W}_n^{-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{W}_n\mathbf{Z}'\boldsymbol{y} \\
&= \left(\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

- Pośrednia MNK (Indirect least squares):

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \widehat{\Gamma}^{-1}\widehat{\lambda} \\
&= \left(\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right)\right)^{-1}\left(\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}'\boldsymbol{y}\right)\right) \\
&= \left(\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}'\boldsymbol{y}\right) \\
&= \left(\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}'\boldsymbol{y}\right).
\end{aligned}$$

Dodatek

- Literatura:

  R.Rigobon, B. Sack (2004) The impact of Monetary Policy on Asset Prices, *Journal of Monetary Economics* 51, 1553–1575.

Metoda „identyfikacji przez heteroskedastyczność”

$$c_{it} = \alpha y_{it} + Ax_{it} + \varepsilon_{it}$$

$$y_{it} = \beta c_{it} + Bx_{it} + \eta_{it}$$

Forma zredukowana modelu:

$$c_{it} = \frac{1}{1-\alpha\beta}\left[Gx_{it} + \varepsilon_{it} + \alpha\eta_{it}\right]$$

$$y_{it} = \frac{1}{1-\alpha\beta}\left[Hx_{it} + \beta\varepsilon_{it} + \eta_{it}\right]$$

Różne wariancje w podpróbach

Macierze wariancji zmiennych objaśnianych w podpróbach *T1* i *T2*:

$$\Omega^{T_1} = \frac{1}{(1-\alpha\beta)^2}\begin{bmatrix} G\Omega_x^{T_1}G' + \sigma_\varepsilon^{T_1} + \alpha^2\sigma_\eta^{T_1} & G\Omega_x^{T_1}H' + \beta\sigma_\varepsilon^{T_1} + \alpha\sigma_\eta^{T_1} \\ \cdot & H\Omega_x^{T_1}H' + \beta^2\sigma_\varepsilon^{T_1} + \sigma_\eta^{T_1} \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{T_2} = \frac{1}{(1-\alpha\beta)^2}\begin{bmatrix} G\Omega_x^{T_2}G' + \sigma_\varepsilon^{T_2} + \alpha^2\sigma_\eta^{T_2} & G\Omega_x^{T_2}H' + \beta\sigma_\varepsilon^{T_2} + \alpha\sigma_\eta^{T_2} \\ \cdot & H\Omega_x^{T_2}H' + \beta^2\sigma_\varepsilon^{T_2} + \sigma_\eta^{T_2} \end{bmatrix}$$

Różnica między wariancjami w podpróbach

Różnica macierzy wariancji:

$$\Delta\Omega = \Omega^{T_2} - \Omega^{T_1} = \frac{(\sigma_\varepsilon^{T_2} - \sigma_\varepsilon^{T_1})}{(1-\alpha\beta)^2}\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \beta^2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy β:

$$\beta = \frac{\Delta\Omega_{12}}{\Delta\Omega_{11}} \qquad \beta = \frac{\Delta\Omega_{22}}{\Delta\Omega_{12}}$$

Metoda zmiennych instrumentalnych

Estymatory MZI:

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{1}{N_2}(\mathbf{c}_{T_2})'\mathbf{y}_{T_2} - \frac{1}{N_1}(\mathbf{c}_{T_1})'\mathbf{y}_{T_1}}{\frac{1}{N_2}(\mathbf{c}_{T_2})'\mathbf{c}_{T_2} - \frac{1}{N_1}(\mathbf{c}_{T_1})'\mathbf{c}_{T_1}}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{1}{N_2}(\mathbf{y}_{T_2})'\mathbf{y}_{T_2} - \frac{1}{N_1}(\mathbf{y}_{T_1})'\mathbf{y}_{T_1}}{\frac{1}{N_2}(\mathbf{c}_{T_2})'\mathbf{y}_{T_2} - \frac{1}{N_1}(\mathbf{c}_{T_1})'\mathbf{y}_{T_1}}$$

Metoda zmiennych instrumentalnych

Estymatory MZI:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{vc}'\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{vc}'\mathbf{y})$$

$$\hat{\beta} = (\mathbf{vy}'\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{vy}'\mathbf{y})$$

Metoda zmiennych instrumentalnych

Różnica między wektorami średnich dla zmiennych objaśnianych w podpróbach:

$$\Delta E\begin{pmatrix} c_{it} \\ y_{it} \end{pmatrix} = \frac{E^{T_2}(\varepsilon_{it}) - E^{T_1}(\varepsilon_{it})}{1-\alpha\beta}\begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}$$

Estymator MZI:

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{1}{N_2}\mathbf{e}'\mathbf{y}_{T_2} - \frac{1}{N_1}\mathbf{e}'\mathbf{y}_{T_1}}{\frac{1}{N_2}\mathbf{e}'\mathbf{c}_{T_2} - \frac{1}{N_1}\mathbf{e}'\mathbf{c}_{T_1}} \qquad \hat{\beta} = (\mathbf{m}'\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{m}'\mathbf{y})$$

Metoda zmiennych instrumentalnych

- Konstrukcja instrumentów:
  - uwzględniających zmiany w wariancji

$$vc_{it} = \begin{cases} c_{it}/N & \text{kiedy} \quad it \in T_1 \\ -c_{it}/N & \text{kiedy} \quad it \in T_2 \end{cases}$$

  - uwzględniających zmiany w średniej

$$m_{it} = \begin{cases} 1/N & \text{kiedy} \quad it \in T_1 \\ -1/N & \text{kiedy} \quad it \in T_2 \end{cases}$$