Ekonometryczne modele nieliniowe

Wykład 1

Dobromił Serwa

Zajęcia

- Wykład
- Laboratorium komputerowe
- Prezentacje

Zaliczenie

- EGZAMIN (50%)
  - *Na egzaminie obowiązują wszystkie informacje przekazane w czasie wykładów (np. slajdy).*

- Aktywność na zajęciach (50%)
  - dodatkowe zadania

    co tydzień praca domowa na kolejne zajęcia
  - obecności warunkiem zaliczenia:

    2 nieobecności = ocena 2 (ndst)

- Kontakt: dserwa@sgh.waw.pl
- Konsultacje: szczegóły na stronie

Pytania sprawdzające

1. Co to jest MNW i jak konstruowany jest estymator MNW dla modelu liniowego?
2. Podaj wzór dla estymatorów MZI i UMM dla modelu liniowego.
3. Jakie znasz metody gradientowe optymalizacji funkcji nieliniowej?
4. Co to jest model TAR i model STAR?
5. Co to jest mieszanina rozkładów (mixture of distributions)?
6. Co to jest model przełącznikowy Markowa i jak szacujemy jego parametry?
7. Co to jest model przestrzeni stanów?
8. Co to jest regresja kwantylowa?
9. Do czego służą metody bootstrap i jacknife?

Tematy wykładów

- NMNK, MNW, testy statystyczne
- Metody gradientowe itp.
- Modele regresji progowej
- Modele łagodnego przejścia + …
- Modele przestrzeni stanów + …
- Modele przełącznikowe Markowa + …
- *Metody bootstrap i jacknife*
- *UMM, MZI, identyfikacja przez heteroskedastyczność…*
- *Modele regresji kwantylowej*

Literatura

Lektury obowiązkowe

- J. D. Hamilton, Time Series Analysis, Princeton University Press, 1994
- B. Hansen, Econometrics, *na jego stronie internetowej…*
- P.H. Franses, D. Dijk, Non-linear time series models in empirical finance, 2006
- Materiały na stronie internetowej: *emn.dserwa.pl*

Lektury dodatkowe

- J. Johnston, J.DiNardo, Econometric Methods, McGraw-Hill, 1997
- G. Chow, Ekonometria, PWN, 1995

Model liniowy

$$y_i = \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \ldots + \beta_k x_{k,i} + u_i$$

- liniowy względem parametrów
- liniowy względem zmiennych

Własności MNK

- Model i jego estymacja

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \ldots + \beta_k x_{kt} + u_t$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X' X})^{-1}\mathbf{X' y} = (\mathbf{X' X})^{-1}\mathbf{X'}(\mathbf{X\beta} + \mathbf{u}) =$$

$$= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X' X})^{-1}\mathbf{X' u}$$

Założenia KMNK

- Estymator nieobciążony, zgodny, efektywny, gdy:
  - Z1: $rz(\mathbf{X}) = k \leq N$
  - Z2: x_i nielosowe, niezależne od u
  - Z3: $E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
  - Z4: $D^2(\mathbf{u}) = E(\mathbf{uu'}) = \sigma^2\mathbf{I}$ $\qquad \sigma^2 < \infty$
  - Dodatkowo Z5: $\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$

czasami słabsze założenia niż niezależność u:

$$E(\mathbf{u} \mid \mathbf{X}) = \mathbf{0} \qquad D^2(\mathbf{u} \mid \mathbf{X}) = E(\mathbf{uu'} \mid \mathbf{X}) = \sigma^2\mathbf{I}$$

Własności MNK

- Estymator nieobciążony $E(\mathbf{b}) = \boldsymbol{\beta}$

- Najefektywniejszy w swojej klasie

- Zgodny: $\lim_{t \to \infty} P(|b_t - \beta| < \delta) = 1$

  dla każdego $\delta > 0$

Własności MNK

Przy spełnionych założeniach Z1 do Z5 mamy:

$$E[(\mathbf{b}-\boldsymbol{\beta})(\mathbf{b}-\boldsymbol{\beta})'] = E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}] = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$\mathbf{b} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

$$b_i \sim N(\beta_i, \sigma(b_i))$$

$$\frac{b_i - \beta_i}{\sigma(b_i)} \sim N(0,1)$$

Testy statystyczne

- Zastosowanie

$$H_0 : b_i = \beta_i \qquad H_1 : b_i \neq \beta_i$$

$$\frac{b_i - \beta_i}{S(b_i)} \sim t(N-k)$$

$$S(b_i) = S\sqrt{d_{ii}}$$

$$S^2 = \frac{\mathbf{u'u}}{N-k}$$

Testy statystyczne

- Przykład 2

  Liczba parametrów: $k = 4$

  Liczba warunków: $m = 2$

$$\beta_1 + \beta_3 = 5$$

$$\beta_2 = \beta_4$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R\beta} = \mathbf{r}$$

Testy statystyczne

- Test F

$$\mathbf{b} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

$$\mathbf{Rb} \sim N(\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}')$$

$$(\mathbf{Rb}-\mathbf{r})'(\sigma^2\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}')^{-1}(\mathbf{Rb}-\mathbf{r}) \sim \chi^2(m)$$

- ponieważ prawdziwe twierdzenie:

Jeśli $\mathbf{z}_{[n\times 1]} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega})$ i $\boldsymbol{\Omega}$ nieosobliwa, to

$$\mathbf{z}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{z} \sim \chi^2(n)$$

Testy statystyczne

- Test F c.d.

$$(\mathbf{Rb}-\mathbf{r})'(\sigma^2\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}')^{-1}(\mathbf{Rb}-\mathbf{r}) \sim \chi^2(m)$$

- Dodatkowa własność $\dfrac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{\sigma^2} \sim \chi^2(N-k)$

$$F = \frac{(\mathbf{Rb}-\mathbf{r})'(\sigma^2\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}')^{-1}(\mathbf{Rb}-\mathbf{r})/m}{S^2/\sigma^2} \sim F(m, N-k)$$

$$F = (\mathbf{Rb}-\mathbf{r})'(S^2\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}')^{-1}(\mathbf{Rb}-\mathbf{r})/m \sim F(m, N-k)$$

Testy statystyczne

- Statystyka Walda

$$W = (\mathbf{Rb} - \mathbf{r})'(S^2\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}')^{-1}(\mathbf{Rb} - \mathbf{r}) \overset{a}{\sim} \chi^2(m)$$

- Przykład dla $H_0 : \beta_i = 0$

$$F = \frac{b_i^2}{\mathrm{var}(b_i)} \sim F(1, N-k)$$

$$t = \frac{b_i}{S(b_i)} \sim t(N-k)$$

Własności estymatorów MNK

TABLE 8.1
Properties of *OLS* Estimates and Test Statistics Under Various Assumptions

	Coefficient **b**	*Variance* s^2	*t statistic*	*F statistic*
Case 1	unbiased $\mathbf{b} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$	unbiased $(T-k)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(T-k)$	exact $t(T-k)$	exact $F(m, T-k)$
Case 2	unbiased non-Gaussian	unbiased $(T-k)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(T-k)$	exact $t(T-k)$	exact $F(m, T-k)$
Case 3	unbiased $\sqrt{T}(\mathbf{b}_T - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{L} N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{Q}^{-1})$	unbiased $\sqrt{T}(s_T^2 - \sigma^2) \xrightarrow{L} N(0, \mu_4 - \sigma^4)$	$t_T \xrightarrow{L} N(0, 1)$	$mF_T \xrightarrow{L} \chi^2(m)$
Case 4	biased $\sqrt{T}(\mathbf{b}_T - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{L} N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{Q}^{-1})$	biased $\sqrt{T}(s_T^2 - \sigma^2) \xrightarrow{L} N(0, \mu_4 - \sigma^4)$	$t_T \xrightarrow{L} N(0, 1)$	$mF_T \xrightarrow{L} \chi^2(m)$

Regression model is $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$, $\mathbf{b}$ is given by [8.1.6], s^2 by [8.1.18], t statistic by [8.1.26], and F statistic by [8.1.32]; μ_4 denotes $E(u_t^4)$.
Case 1: $\mathbf{X}$ nonstochastic, $\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_T)$.
Case 2: $\mathbf{X}$ stochastic, $\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_T)$, $\mathbf{X}$ independent of $\mathbf{u}$.
Case 3: $\mathbf{X}$ stochastic, $\mathbf{u} \sim$ non-Gaussian $(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_T)$, $\mathbf{X}$ independent of $\mathbf{u}$, $T^{-1}\Sigma\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t' \xrightarrow{p} \mathbf{Q}$.
Case 4: Stationary autoregression with independent errors, $\mathbf{Q}$ given by [8.2.27].

Źródło: J. Hamilton, TSA, str. 209

Dodatek: słaba zbieżność

- Słaba zbieżność (convergence in distribution)

  Ciąg zmiennych losowych $\{X_N\}_{N=1}^{\infty}$

  $F_{X_N}(x)$ - dystrybuanta X_N

  Istnieje dystrybuanta $F_X(x)$, taka że

  $\lim_{N\to\infty} F_{X_N}(x) = F_X(x)$ w każdym punkcie x,

  w którym $F_X(\cdot)$ jest ciągła.

X_N zbiega słabo do X :

$$X_N \xrightarrow{L} X$$

Testy statystyczne

- Nieliniowe restrykcje na parametry

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0} \qquad \mathbf{g}: \Re^k \rightarrow \Re^m$$

$$W = \{\mathbf{g}(\mathbf{b})\}' \left\{ \left[\left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right|_{\boldsymbol{\beta}=\mathbf{b}} \right] S^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \left[\left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right|_{\boldsymbol{\beta}=\mathbf{b}} \right]' \right\}^{-1} \{\mathbf{g}(\mathbf{b})\} \xrightarrow{L} \chi^2(m)$$

- Przykład: $\dfrac{\beta_1}{\beta_2} + \beta_3 = 1 \qquad k = 3$

Testy postaci liniowej

- Test liczby serii
- RESET test
- Testy Chowa
- Test Quandta-Andrewsa
- Test CUSUM, CUSUMSQ

Testy …

- Test liczby serii
  - r – liczba serii
  - N1 – liczba dodatnich reszt
  - N2 – liczba ujemnych reszt

- H0: model liniowy   r<=r*
- H1: model nieliniowy   r>r*

Testy …

- RESET test Ramseya

  Model podstawowy i rozszerzony

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + ... + \beta_k x_{kt} + u_t$$

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + ... + \beta_k x_{kt} + \delta_1 \hat{y}_t^2 + ... + \delta_m \hat{y}_t^{m+1} + u_t$$

$$F = \frac{(R_r^2 - R^2)/m}{(1 - R_r^2)/(N-k-m)} \sim F(m, N-k-m)$$

Testy …

- Chow's breakpoint test:
  Czy parametry równe w podpróbach?

$$F = \frac{(RSS - RSS_1 - RSS_2)/k}{(RSS_1 + RSS_2)/(N-2k)} \sim F(k, N-2k)$$

… i rozszerzenie testu …

Testy …

- Test Quandta-Andrewsa

  nieznany moment zmiany strukturalnej

$$\mathrm{MaxF} = \max_{\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2} (F(\tau))$$

$$\mathrm{ExpF} = \ln\left(\frac{1}{k}\sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} \exp\left(\frac{1}{2}F(\tau)\right)\right)$$

$$\mathrm{AveF} = \frac{1}{k}\sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} F(\tau)$$

Przybliżone rozkłady asymptotyczne:

Hansen (1997)

Testy …

- Chow forecast test (kiedy N_2 małe)

$$F = \frac{(RSS - RSS_1)/N_2}{RSS_1/(N_1 - k)} \sim F(N_2, N_1 - k)$$

- Chow test dla prób z różnymi wariancjami reszt

$$W = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)^{-1}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) \sim \chi^2(k)$$

Testy …

- Test CUSUM

$$\hat{u}_t = y_t - \mathbf{x}_t \mathbf{b}_{t-1}$$

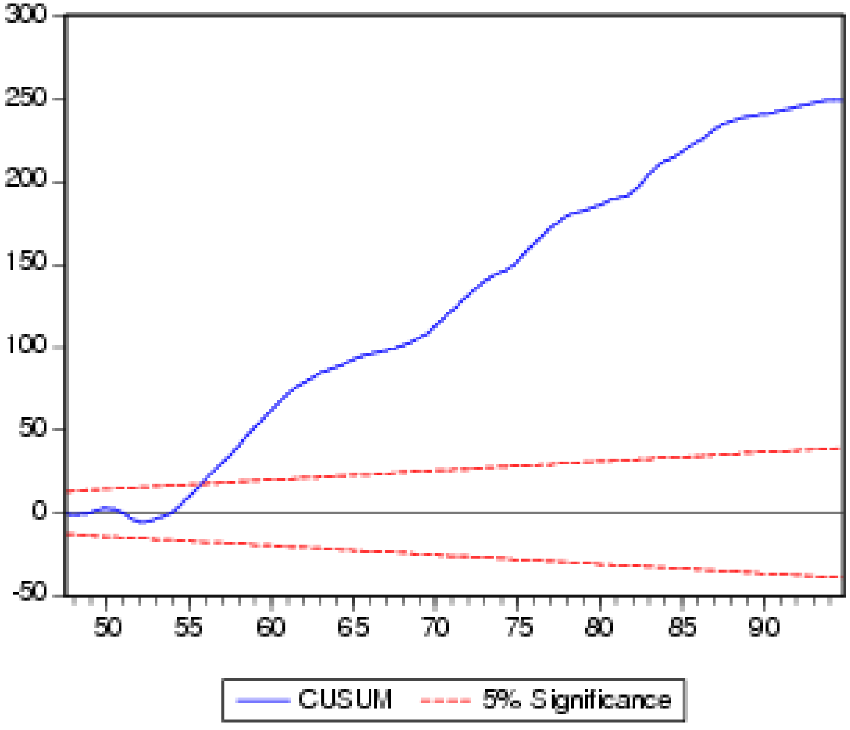
$$\sigma_{f\,t} = \sigma_{t-1}\sqrt{1 + \mathbf{x}_t(\mathbf{X}_{t-1}'\mathbf{X}_{t-1})\mathbf{x}_t'}$$

$$w_t = \frac{\hat{u}_t}{\sqrt{1 + \mathbf{x}_t(\mathbf{X}_{t-1}'\mathbf{X}_{t-1})\mathbf{x}_t'}} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$W_t = \sum_{\tau=k+1}^{t} \frac{w_\tau}{S}$$

Testy …

- Test CUSUM c.d.



Źródło: Eviews 6 Users Guide

p=0,01 a=1,143
p=0,05 a=0,948
p=0,10 a=0,850

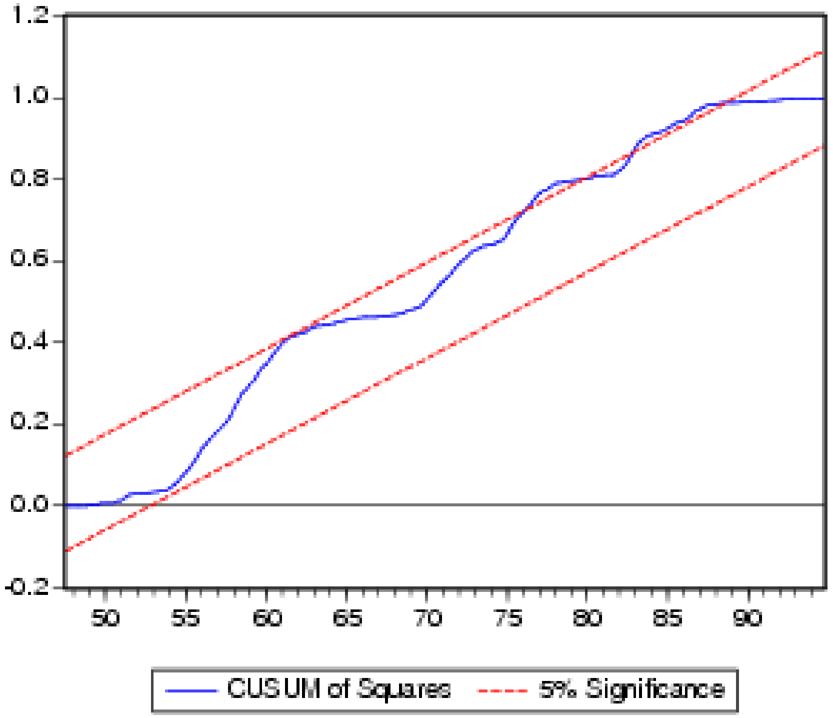
$$[k, \pm\text{–}0.948(T-k)^{1/2}] \quad \text{and} \quad [T, \pm 3\times 0.948(T-k)^{1/2}]$$

Testy …

- Test CUSUMSQ

Źródło: Eviews 6 Users Guide

$$W_t = \frac{\sum_{\tau=k+1}^{t} w_\tau^2}{\sum_{\tau=k+1}^{T} w_\tau^2}$$



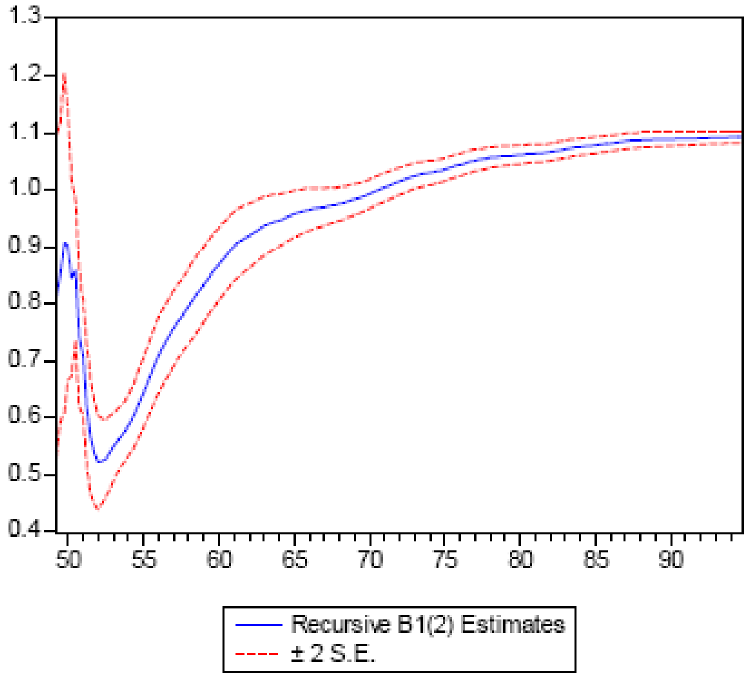
$$E(W_t) = \frac{t-k}{N-k}$$

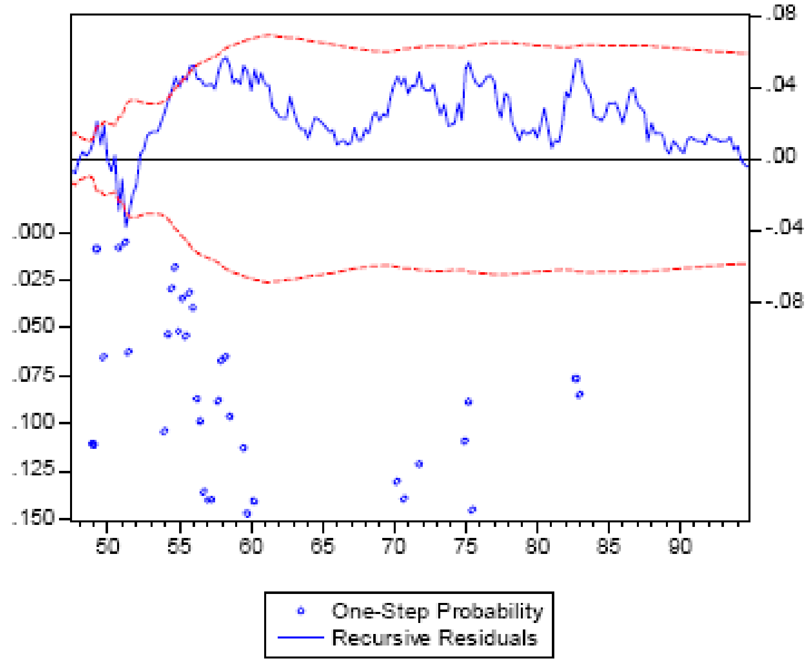
Tablice z wartościami kryzytycznymi np. w: Johnston, DiNardo …

Testy …

- Rekursywne reszty
- Rekursywne oszacowania parametrów

… i problemy …





Źródło: Eviews 6 Users Guide

Pytania

- Jak wykorzystać statystykę F do testowania stabilności parametrów?