Rozdział 2. Podstawowe testy liniowej postaci modelu regresji

W rozdziale tym skoncentrowano uwagę na najbardziej popularnych testach specyfikacji modelu regresji, które służą zbadaniu czy postać liniowa modelu jest prawidłowa, czy też bardziej odpowiednia byłaby postać nieliniowa.

2.1. Test RESET

Test RESET Ramseya (1969) służy do sprawdzenia czy postać funkcyjna oszacowanego modelu jest prawidłowa, czy w oszacowanym modelu nie brakuje istotnych zmiennych lub czy zmienne objaśniające nie są skorelowane ze składnikiem losowym (por. także Ramsey i Schmidt, 1976). Gdyby któryś z tych warunków nie był spełniony, to oszacowania parametrów w modelu regresji byłyby najprawdopodobniej obciążone i niezgodne, ponieważ składnik losowy zawierałby ważne informacje dotyczące zmiennych objaśniających.

Hipoteza zerowa testu zakłada, że składnik losowy spełnia Założenia 1 – 6, czyli $H_0\colon \boldsymbol{u}|\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{0},\sigma^2\boldsymbol{I})$. Natomiast hipoteza alternatywna zakłada, że składnik losowy ma wartość oczekiwaną różną od zera, $H_1\colon \boldsymbol{u}|\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{\mu},\sigma^2\boldsymbol{I})$ i $\boldsymbol{\mu}\neq\boldsymbol{0}$ (Johnston, DiNardo, 1997, str. 121).

W pierwszym kroku procedury testowej weryfikowany model regresji jest szacowany i wyliczany jest wektor wartości teoretycznych $\hat{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Następnie definiowane są wektory $\hat{\boldsymbol{y}}^2$, $\hat{\boldsymbol{y}}^3$, $\hat{\boldsymbol{y}}^4$, …, zawierające odpowiednie kolejne potęgi wartości elementów wektora $\hat{\boldsymbol{y}}$. Wektor $\hat{\boldsymbol{y}}^2$ zawiera drugie potęgi elementów wektora $\hat{\boldsymbol{y}}$, wektor $\hat{\boldsymbol{y}}^3$ zawiera trzecie potęgi i tak dalej. Zwykle wystarczą już tylko wektory $\hat{\boldsymbol{y}}^2$ i $\hat{\boldsymbol{y}}^3$. W kolejnym kroku nowo utworzone wektory traktuje się jak dodatkowe zmienne w modelu regresji i szacuje się tak rozszerzony model. Testowanie hipotezy zerowej polega na sprawdzeniu przy pomocy statystyki F opisanej wzorem (1.18), czy dodane zmienne są statystycznie istotne, czyli czy nieliniowości reprezentowane przez potęgi obserwacji w $\hat{\boldsymbol{y}}$ powinny zostać uwzględnione w modelu. Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej statystyka F ma rozkład $F(m,n-k-m)$, gdzie m oznacza liczbę dodatkowych zmiennych dodanych do modelu regresji.

Przykład 2.1

Przeprowadźmy test RESET na modelu z przykładu 1.17 przy użyciu symulowanych danych. Wygenerujmy obserwacje zmiennych objaśniających i objaśnianej oraz wektor „prawdziwych" wartości parametrów.

```
X =[ones(100,1) randn(100,2)];  % stała i dwie zmienne generowane z N(0,1)
e = randn(100,1);               % wektor składników losowych z N(0,1)
```

```
alfa = [3; 2; 1];                % prawdziwe parametry modelu
y = X*alfa+e;                    % wartości y wygenerowane z modelu
```

Zwróćmy uwagę, że prawdziwy model jest liniowy i nasz test nie powinien dać podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej o liniowej postaci modelu. Oszacujmy teraz model podstawowy udając, że nie znamy prawdziwych wartości parametrów. Oszacowania parametrów pomogą nam wyznaczyć teoretyczne wartości $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}^2$ i $\hat{\boldsymbol{y}}^3$.

```
beta1 = X\y                      % oszacowania MNK
y_hat = X*beta1;                 % y prognozowane przez model
y_hat2 = y_hat.^2;               % y prognozowane podniesione do kwadratu
y_hat3 = y_hat.^3;               % y prognozowane podniesione do 3 potęgi
```

Zdefiniujmy i oszacujmy model rozszerzony o sztuczne zmienne objaśniające $\hat{\boldsymbol{y}}^2$ i $\hat{\boldsymbol{y}}^3$.

```
Xr = [X y_hat2 y_hat3];          % dodanie dwóch zmiennych jako objaśniających
beta2 = Xr\y                     % oszacowania MNK
```

W końcu policzmy statystykę testową i jej wartość p (empiryczny poziom istotności).

```
u   = y - X*beta1;               % reszty z regresji szacowanej MNK
u_r = y - Xr*beta2;              % reszty z modelu rozszerzonego
m = 2;                           % liczba niezależnych restrykcji
[n k] = size(Xr);                % liczba obserwacji n i liczba parametrów k
F = (u'*u - u_r'*u_r)/(u_r'*u_r)*(n-k)/m    % statystyka F
p_F = 1-fcdf(F,m,n-k-m)          % p-value statystyki F
```

Zwróćmy uwagę, że testujemy jednocześnie nieistotność dwóch zmiennych $\hat{\boldsymbol{y}}^2$ i $\hat{\boldsymbol{y}}^3$, czyli sprawdzamy dwie niezależne restrykcje w modelu rozszerzonym.

2.2. Test Chowa

Test Chowa (1960) (*Chow's test for structural change*) służy do wykrywania zmian strukturalnych w dużych próbach. Test polega na podzieleniu próby na dwie podpróby i na sprawdzeniu, czy parametru modelu oszacowanego na podstawie danych z jednej podpróby są identyczne jak te oszacowane przy użyciu danych z drugiej podpróby. Hipoteza zerowa wskazuje, że parametry modelu regresji w obu podpróbach są jednakowe, $H_0\colon \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$, natomiast hipoteza alternatywna zakłada, że parametry w obu próbach są różne, $H_0\colon \boldsymbol{\beta}_1 \neq \boldsymbol{\beta}_2$. Odrzucenie hipotezy zerowej na rzecz alternatywnej może sugerować, że liniowa postać modelu nie jest odpowiednia.

W pierwszym kroku procedury testowej szacujemy model regresji na podstawie danych z całej próby, potem na podstawie danych z pierwszej podpróby, a na końcu z drugiej podpróby.

Obliczamy reszty z każdego oszacowanego modelu i obliczamy kolejno sumy kwadratów reszt dla każdego z oszacowanych modeli. Sumy kwadratów reszt oznaczamy odpowiednio jako S, S_1, S_2. W drugim kroku obliczamy statystykę testową, która jest analogiczna do tych zapisanych wzorami (1.13) i (1.18):

$$F = \frac{[S - (S_1 + S_2)]/k}{(S_1 + S_2)/(n - 2k)} \tag{2.1}$$

Statystyka F przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej ma rozkład $F(k, n - 2k)$.

Przykład 2.2

Przeprowadźmy test Chowa na modelu z przykładu 2.1 przy użyciu symulowanych danych. Wygenerujmy obserwacje zmiennych objaśniających i objaśnianej oraz wektor „prawdziwych" wartości parametrów.

```
X =[ones(100,1) randn(100,2)];  % stała i dwie zmienne generowane z N(0,1)
e = randn(100,1);               % wektor składników losowych z N(0,1)
alfa = [3; 2; 1];               % prawdziwe parametry modelu
y = X*alfa+e;                   % wartości y wygenerowane z modelu
```

Prawdziwy model jest liniowy i nasz test nie powinien dać podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej o braku różnic strukturalnych w modelu w dwóch podpróbach.

Podzielmy próbę tak by pierwsza podpróba liczyła 60 obserwacji, a druga podpróba – 40 obserwacji.

```
X1 = X(1:60,:);                 % niech pierwsza podpróba liczy 60 obserwacji
y1 = y(1:60,:);                 % kopiujemy wartości z macierzy X i y
X2 = X(61:100,:);               % teraz druga podpróba
y2 = y(61:100,:);               % kopiujemy wartości z macierzy X i y
```

Oszacujmy model w całej próbie i w obu podpróbach udając, że nie znamy prawdziwych wartości parametrów. Następnie policzmy reszty dla każdej regresji i sumy kwadratów reszt.

```
b   = X\y;                      % szacujemy parametry w całej próbie
b1  = X1\y1;                    % szacujemy parametry w 1. podpróbie
b2  = X2\y2;                    % szacujemy parametry w 2. Podpróbie
u   = y - X*b;                  % liczymy reszty z modelu na całej próbie
u1  = y1 - X1*b1;               % liczymy reszty z modelu na 1. podpróbie
u2  = y2 - X2*b2;               % liczymy reszty z modelu na 2. Podpróbie
S = u'*u;                       % suma kwadratów reszt z całej próby
S1 = u1'*u1;                    % suma kwadratów reszt z 1. podpróby
S2 = u2'*u2;                    % suma kwadratów reszt z 2. Podpróby
```

Na końcu policzmy statystykę testową i jej wartość p (empiryczny poziom istotności).

```
[n, k] = size(X);                   % liczba obserwacji i liczba parametrów
```

```
F = (S-(S1+S2))/(S1+S2)*(n-2*k)/k   % statystyka testu Chowa
p_F = 1-fcdf(F,k,n-2*k)             % p-value statystyki F
```

Otrzymane wyniki statystyki F powinny być niskie, a wartości p wysokie.

Przykład 2.3

Możliwe jest przedstawienie statystyki Chowa w alternatywny sposób po odpowiednim powieleniu i przedefiniowaniu zmiennych objaśniających w modelu regresji. Zdefiniujmy dwie grupy zmiennych, tak by tylko obserwacje z pierwszej podpróby były niezerowe i równe oryginalnym obserwacjom zmiennych objaśniających dla pierwszej grupy zmiennych, a obserwacje z drugiej podpróby były niezerowe i równe oryginalnym obserwacjom zmiennych objaśniających dla drugiej grupy zmiennych objaśniających. Można wtedy otrzymać identyczną wartość statystyki F, jak ta zapisana wzorem (1.13) oraz jak statystyka F zapisana wzorem (1.18).

Zdefiniujmy zmienne $x_{1,i}^{*}$, $x_{2,i}^{*}$, …, $x_{k,i}^{*}$, które przyjmują wartości identyczne jak $x_{1,i}$, $x_{2,i}$, ..., $x_{k,i}$ z oryginalnego modelu regresji dla $i = 1$, ..., i^{*} oraz przyjmują wartości zero dla $i = i^{*} + 1$, ..., n. Oznaczmy macierz obserwacji zmiennych $x_{1,i}^{*}$, $x_{2,i}^{*}$, …, $x_{k,i}^{*}$ w próbie przez $\boldsymbol{X}^{*}$. Analogicznie zdefiniujmy zmienne $x_{1,i}^{**}$, $x_{2,i}^{**}$, …, $x_{k,i}^{**}$, które przyjmują wartości zero dla $i = 1$, ..., i^{*} oraz przyjmują wartości identyczne jak $x_{1,i}, x_{2,i}$, ..., $x_{k,i}$ dla $i = i^{*} + 1$, ..., n. Oznaczmy macierz obserwacji zmiennych $x_{1,i}^{**}$, $x_{2,i}^{**}$, …, $x_{k,i}^{**}$ w próbie przez $\boldsymbol{X}^{**}$. Następnie zbudujmy model regresji wykorzystujący tak przetworzone zmienne:

$$y_i = \beta_1^{*} x_{1,i}^{*} + \beta_2^{*} x_{2,i}^{*} + \ldots + \beta_k^{*} x_{k,i}^{*} + \beta_1^{**} x_{1,i}^{**} + \beta_2^{**} x_{2,i}^{**} + \ldots + \beta_k^{**} x_{k,i}^{**} + u_i \qquad (2.2)$$

Sprawdzenie czy parametry modelu regresji są identyczne w podpróbie obserwacji $i = 1$, ..., i^{*} jak w podpróbie obserwacji $i = i^{*} + 1$, ..., n polega na weryfikacji hipotezy H_0: $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$, gdzie $\boldsymbol{\beta}_1 = [\beta_1^{*} \quad \beta_2^{*} \quad \ldots \quad \beta_k^{*}]'$ i $\boldsymbol{\beta}_2 = [\beta_1^{**} \quad \beta_2^{**} \quad \ldots \quad \beta_k^{**}]'$. Testować taką hipotezę można nakładając restrykcje liniowe $\boldsymbol{R\beta} = \boldsymbol{r}$, gdzie $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1{}' \quad \boldsymbol{\beta}_2{}']'$, na parametry modelu regresji (2.2). Macierz $\boldsymbol{R}$ ma wtedy postać $[\boldsymbol{I}_{k\times k} \quad -\boldsymbol{I}_{k\times k}]$ i wymiary $k \times 2k$, a wektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}_{k\times 1}$ składa się z k zer. Możliwe jest zatem wykorzystanie statystyk F i Walda, przedstawionych w punkcie 1.3, do przeprowadzenia tego testu. Statystyki mnożnika Lagrange'a i testu ilorazu wiarygodności, przedstawione w rozdziale 3, także mogą zostać tutaj użyte.

2.3. Test Quandta-Andrewsa

Test Quandta (1960) i Andrewsa (1993) jest podobny do testu Chowa (1960). Także służy on do wykrywania zmian strukturalnych w modelu w dużych próbach. Test polega na podzieleniu próby na dwie podpróby i na sprawdzeniu, czy parametru modelu oszacowanego na podstawie danych z jednej podpróby są identyczne jak te oszacowane przy użyciu danych z drugiej podpróby. Jednak w tym teście przyjmuje się, że nieznany jest moment (lub miejsce) zmiany strukturalnej, co oznacza, że nie wiadomo z góry w jaki sposób podzielić próbę na dwie podpróby. Hipoteza zerowa wskazuje, że parametry modelu regresji w obu podpróbach są jednakowe, $H_0: \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$, natomiast hipoteza alternatywna zakłada, że parametry w obu próbach są różne, $H_1: \boldsymbol{\beta}_1 \neq \boldsymbol{\beta}_2$.

Procedura testowa przebiega w następujący sposób. Niech π oznacza część całej próby, która znajduje się w pierwszej podpróbie. To znaczy, że pierwsze πn obserwacji znajduje się w pierwszej podpróbie, a kolejne $(1-\pi)n$ obserwacji znajduje się w drugiej podpróbie. Nieznana wartość parametru π wyznacza zatem punkt zmiany strukturalnej w modelu. Dla różnych $\pi \in (\pi_1, \pi_2)$, gdzie $0 < \pi_1 < \pi_2 < 1$, przeprowadza się test stabilności parametrów Chowa i wylicza odpowiednią statystykę, a następnie wybiera się największą wartość statystyki spośród wszystkich wyliczonych. Statystyka testowa może zatem przyjmować jedną z postaci: $\sup\limits_{\pi \in (\pi_1, \pi_2)} W(\pi)$, $\sup\limits_{\pi \in (\pi_1, \pi_2)} LM(\pi)$, $\sup\limits_{\pi \in (\pi_1, \pi_2)} LR(\pi)$, gdzie $W(\pi)$ oznacza statystykę Walda wyliczoną przy założeniu podziału próby w punkcie π. Wyrażenie $LM(\pi)$ oznacza statytykę mnożnika Lagrange'a wyliczoną przy założeniu podziału próby w punkcie π, a $LR(\pi)$ – analogiczną statystykę ilorazu wiarygodności. Wszystkie trzy statystyki służące między innymi do badania restrykcji nakładanych na parametry modeli regresji zostały szerzej omówione w rozdziale 3.

Ponieważ parametr π jest nieidentyfikowalny przy założeniu hipotezy zerowej (czyli jego wartość nie ma znaczenia dla oszacowań innych parametrów modelu), to występuje tutaj problem występowania w modelu tzw. kłopotliwych parametrów, które są nieidentyfikowalne przy założeniu hipotezy zerowej ($H_0: \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$). W takiej sytuacji statystyki $supW$, $supLM$, $supLR$ mają niestandardowe rozkłady, które zależą od danych użytych do obliczeń. Rozkłady asymptotyczne tych statystyk też są niestandardowe, ale zależą jedynie od liczby parametrów modelu. Wartości krytyczne testu zostały przedstawione w pracach Andrewsa (1993, 2003).

Przykład 2.4

Przeprowadźmy test Quandta-Andrewsa na modelu regresji i przy użyciu symulowanych danych. W tym przykładzie zdefiniujemy tak dane, żeby zmiana strukturalna w modelu rzeczywiście zachodziła po pierwszych 40% obserwacji. To znaczy, że dla drugiej części 60% obserwacji parametry modelu będą inne niż dla pierwszej części 40% obserwacji.

```
X =[ones(100,1) randn(100,2)];  % stała i dwie zmienne generowane z N(0,1)
e = randn(100,1);               % wektor składników losowych z N(0,1)
alfa1 = [3; 2; 1];              % parametry modelu dla pierwszej podpróby
alfa2 = [-1; -2; -3];           % parametry modelu dla drugiej podpróby
y(1:40,1) = X(1:40,:)*alfa1+e(1:40,1);       % wartości y dla 1. podpróby
y(41:100,1) = X(41:100,:)*alfa2+e(41:100,1); % wartości y dla 2. podpróby
```

Następnie zdefiniujmy funkcję `test_zmiany2`, która pozwoli policzyć statystyki F i W. Te statystyki są analogiczne jak w opisanym wcześniej teście Chowa i służą do sprawdzenia wystąpienia zmiany strukturalnej w wybranym miejscu w próbie. Taką funkcję najlepiej zapisać w oddzielnym pliku o nazwie `test_zmiany2.m`.

```
function [F, W] = test_zmiany2(X,y,gdzie)
    [n, k] = size(X);               % liczba obserwacji i liczba parametrów
    % definiujemy nowe zmienne objaśniające jak w przykładzie 2.3
    I   = diag([ones(gdzie,1); zeros(n-gdzie,1)]); % mac. do selekcji podprób
    X1  = I*X;                      % definiujemy pierwszą grupę zmiennych
    X2  = (eye(n)-I)*X;             % definiujemy drugą grupę zmiennych
    b1  = [X1 X2]\y;                % szacujemy parametry z modelu H1
    b0  = X\y;                      % szacujemy parametry z modelu H0
    u1  = y - [X1 X2]*b1;           % liczymy reszty z modelu na całej próbie
    u0  = y - X*b0;                 % liczymy reszty z modelu na 1. podpróbie
    S1  = u1'*u1;                   % suma kwadratów reszt z modelu H1
    S0  = u0'*u0;                   % suma kwadratów reszt z modelu H0
    F   = (S0 - S1)/S1*(n-2*k)/k;   % statystyka F testu zmiany strukturalnej
    W   = k*F;                      % analogiczna statystyka Walda
end
```

Argumentami tej funkcji są macierze obserwacji zmiennych objaśniających (`X`) i objaśnianych (`y`) oraz zmienna reprezentująca numer obserwacji (`gdzie`), dla której testowana jest zmiana strukturalna. Funkcja zwraca policzone wartości statystyk F i W (`F` i `W`). Ważny jest fakt, że zdefiniowana w tym przykładzie statystyka F jest numerycznie identyczna ze statystyką testu Chowa (np. tą policzoną w przykładzie 2.2 i 2.3).

Zgodnie z opisem procedury testowej musimy teraz znaleźć taki numer obserwacji, dla którego statystyki F i W osiągają najwyższe wartości (czyli $\sup F$ i $\sup W$).

```
Fi = zeros(80,1);               % zdefiniujmy macierz statystyk F
Wi = zeros(80,1);               % zdefiniujmy macierz statystyk W
for i=11:90                     % dla różnych punktów zmiany strukturalnej
    [Fi(i-10,1),Wi(i-10,1)] = test_zmiany2(X,y,i);
```

```
end                               % policzmy statystyki F i W
plot(11:90,Wi');                  % narysujmy policzone statystyki na wykresie
[supF, gdzieF] = max(Fi)          % policzmy największą wartość F
[supW, gdzieW] = max(Wi)          % policzmy największą wartość W
```

Pętla `for` … `end` pozwala sprawdzić kolejne punkty w próbie – od 11. do 90. obserwacji – w których potencjalnie mogła wystąpić zmiana strukturalna. Program przy okazji rysuje wszystkie policzone statystyki W na wykresie względem obserwacji 11 do 90 – potencjalnym miejsc zmiany strukturalnej. Zmienne `gdzieF` i `gdzieW` wskazują, w których miejscach w próbie wystąpiła zmiana strukturalna. Ponieważ pętla rozpoczyna się od 11. obserwacji, to do wartości tych zmiennych trzeba dodać 10.

2.4. Test prognostyczny Chowa

Test prognostyczny Chowa (1960; *Chow's forecast test*) jest podobny do testu zmian strukturalnych Chowa. Jest on wykorzystywany wtedy, gdy jedna (zwykle druga) podpróba jest zbyt krótka by szacować w niej parametry regresji. Zgodnie z hipotezą zerową parametry modelu regresji w obu podpróbach są jednakowe, $H_0\colon \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$, natomiast hipoteza alternatywna zakłada, że parametry w obu próbach są różne, $H_0\colon \boldsymbol{\beta}_1 \neq \boldsymbol{\beta}_2$.

Procedurę testową przeprowadza się w następujący sposób. Należy podzielić próbę na dwie części, z których pierwsza (większa) zawiera n_1 obserwacji, a druga (mniejsza) składa się z $n_2 = n - n_1$ obserwacji. Szacowane są parametry modelu na podstawie n_1 obserwacji z pierwszej podpróby $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1$ oraz wyliczane są reszty $\widehat{\boldsymbol{u}}_1 = \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{X}_1\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1$. Następnie na podstawie obserwacji zmiennych objaśniających z drugiej podpróby $\boldsymbol{X}_2$ oraz oszacowań parametrów z pierwszej podpróby $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1$ wyliczane są prognozy y_i^p wartości y_i w drugiej podpróbie, a wektor tych prognoz oznaczony jest jako $\boldsymbol{y}_2^p$, $\boldsymbol{y}_2^p = \boldsymbol{X}_2\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1$. Wyliczane są błędy prognozy $\boldsymbol{u}_2^p = \boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_2^p$. Przy założeniu prawdziwości H_0 i przy spełnionych Założeniach 1 – 6 wartość oczekiwana błędów prognozy $E(\boldsymbol{u}_2^p) = \boldsymbol{0}$, a macierz wariancji błędów prognozy $var(\boldsymbol{u}_2^p) = E(\boldsymbol{u}_2^p\boldsymbol{u}_2^{p\prime}) = \sigma^2[\boldsymbol{I}_{n_2} + \boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_2']$. Statystyka testowa F:

$$F = \frac{\boldsymbol{u}_2^{p\prime}[\boldsymbol{I}_{n_2} + \boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_2']\boldsymbol{u}_2^p/n_2}{\widehat{\boldsymbol{u}}_1'\widehat{\boldsymbol{u}}_1/(n_1 - k)} \qquad (2.3)$$

ma rozkład $F(n_2, n_1 - k)$ przy założeniu prawdziwości H_0. Johnston i DiNardo (1997, str. 113-116) podają różne alternatywne sposoby wyliczenia tego testu.

Przykład 2.5

Policzmy test prognostyczny Chowa na podstawie danych i modelu z przykładu 2.4.

```
X =[ones(100,1) randn(100,2)];  % stała i dwie zmienne generowane z N(0,1)
e = randn(100,1);               % wektor składników losowych z N(0,1)
alfa1 = [3; 2; 1];              % parametry modelu dla pierwszej podpróby
alfa2 = [-1; -2; -3];           % parametry modelu dla drugiej podpróby
y(1:40,1) = X(1:40,:)*alfa1+e(1:40,1);       % wartości y dla 1. podpróby
y(41:100,1) = X(41:100,:)*alfa2+e(41:100,1); % wartości y dla 2. podpróby
```

Błędnie przypuśćmy, że zmiana strukturalna nastąpiła w okolicach 80. obserwacji i oszacujmy parametry modelu dla pierwszych 80 obserwacji pozostawiają 20 obserwacji w oknie prognostycznym.

```
X1 = X(1:80,:);                 % obserwacje X z okna estymacji
y1 = y(1:80,1);                 % obserwacje y z okna estymacji
X2 = X(81:100,:);               % obserwacje X z okna prognozy
y2 = y(81:100,1);               % obserwacje y z okna prognozy
beta = X1\y1;                   % szacunek parametrów w oknie estymacji
u1 = y1 - X1*beta;              % reszty oszacowań w oknie estymacji
yp = X2*beta;                   % prognozy y w oknie prognoz
up = y2 - yp;                   % błędy prognozy ex post
```

W oknie prognozy zostały policzone prognozy `yp` i błędy prognozy `up`. Potrzebne jest jeszcze policzenie obserwacji w obu oknach oraz policzenie parametrów.

```
[n1, k] = size(X1);             % l. obserwacji i parametrów w oknie estymacji
n2 = size(X2,1);                % liczba obserwacji w oknie prognozy
```

Na końcu zapisujemy w skrypcie wzór (2.3) na statystykę testową F.

```
iXXX = eye(n2)+X2*inv(X1'*X1)*X2'; % macierz skalowania błędów prognozy
licznik     = up'*iXXX*up/n2;   % licznik statystyki F
mianownik   = u1'*u1/(n1-k);    % wariancja reszt jako mianownik statystyki F
F = licznik/mianownik           % statystyka testowa F
p_F = 1-fcdf(F,n2,n1-k)         % p-value statystyki F
```

Test ten częściej pozwalałby nam odrzucać hipotezę zerową, gdybyśmy dobrze dobrali miejsce zmiany strukturalnej. Ponieważ jednak zmiana strukturalna nastąpiła blisko początku próby, to lepszym testem do jej identyfikacji byłby test Chowa przedstawiony w punkcie 2.2 lub test Quandta-Andrewsa z punktu 2.3.

2.5. Testy CUSUM i CUSUMSQ

Testy CUSUM i CUSUMSQ służą do diagnozowania problemów związanych ze specyfikacją modelu, w szczególności zmian strukturalnych, nieuwzględnionych nieliniowych zależności między zmiennymi oraz brakujących ważnych zmiennych (Brown, Durbin i Evans, 1975).

Testy te polegają na sekwencyjnym i rekursywnym sprawdzaniu stabilności parametrów modelu poprzez badanie odstających wartości sum i sum kwadratów błędów prognozy. Najczęściej test ten wykonywany jest przy wykorzystaniu danych w postaci szeregów czasowych, ponieważ wtedy można łatwo ustalić kolejność obserwacji w próbie i ewentualne zmiany strukturalne w danym momencie w czasie mają często swoje ekonomiczne uzasadnienie. Hipoteza zerowa zakłada, że parametry regresji są stałe w próbie, H_0: $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2 = \ldots = \boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\beta}$ (oraz $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2 = \sigma^2$), a hipoteza alternatywna zakłada, że w próbie następuje zmiana wartości tych parametrów $\boldsymbol{\beta}$.

Procedura testowa przebiega w następujący sposób. W pierwszym kroku szacowane są parametry $\boldsymbol{\beta}$ modelu regresji na podstawie pierwszych j obserwacji, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j$. Następnie na podstawie obserwacji $\boldsymbol{x}_{j+1}$ i oszacowania $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j$ obliczana jest prognoza y_{j+1}, czyli $y_{j+1}^p = \boldsymbol{x}_{j+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j$, oraz liczony jest „standaryzowany" błąd prognozy

$$u_{j+1}^p = \left(y_{j+1} - y_{j+1}^p\right) \Big/ \left[\hat{\sigma} \cdot \sqrt{1 + \boldsymbol{x}_{j+1}\left(\boldsymbol{X}_j{}'\boldsymbol{X}_j\right)^{-1}\boldsymbol{x}_{j+1}{}'}\right],$$

gdzie $\boldsymbol{X}_j = [\boldsymbol{x}_1{}' \quad \boldsymbol{x}_2{}' \quad \ldots \quad \boldsymbol{x}_j{}']'$ oznacza macierz obserwacji zmiennych objaśniających, zapisanych od obserwacji 1 to obserwacji j. Liczony jest ciąg statystyk

$$CUSUM_i = \sum_{t=k+1}^{i} u_t^p \tag{2.4}$$

dla $i = k + 1, \ldots, n$, czyli dla wszystkich obserwacji od $k + 1$ do końca próby. Każda ze statystyk $CUSUM_i$ jest porównywana z odpowiednią parą wartości krytycznych c_i^- i c_i^+. Wartości krytyczne c_i^- i c_i^+ leżą na dwóch symetrycznych odcinkach o współrzędnych $\left[\left(k, \pm a \cdot \sqrt{n-k}\right), \left(n, \pm 3a \cdot \sqrt{n-k}\right)\right]$ (por. wykres 2.1). Parametr a został w tych współrzędnych tak dobrany, żeby prawdopodobieństwo przekroczenia przez statystykę $CUSUM_i$ któregoś z odcinków przy założeniu prawdziwości H_0 było w przybliżeniu równe α przy poziomie istotności testu równym właśnie α. Na przykład dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}01$ parametr $a = 1{,}143$, dla $\alpha = 0{,}05$ parametr $a = 0{,}948$, a dla $\alpha = 0{,}10$ parametr $a = 0{,}850$.

W analogiczny sposób przeprowadzany jest test $CUSUMSQ$ (*cusum of squares test*) służący do sprawdzenia tej samej hipotezy zerowej. Tutaj sprawdzana jest alternatywna hipoteza, że odchylenia parametrów $\boldsymbol{\beta}$ od stałych wartości w próbie mają charakter losowy – a nie systematyczny – jak w przypadku statystyki $CUSUM_i$. Liczony jest ciąg statystyk

$$CUSUMSQ_i = \sum_{t=j+1}^{i} \left(u_t^p\right)^2 \Big/ \sum_{t=j+1}^{n} \left(u_t^p\right)^2 \tag{2.5}$$

dla $i = k+1, \ldots, n$, czyli dla wszystkich obserwacji od $k+1$ do końca próby. Każda ze statystyk $CUSUMSQ_i$ jest porównywana z odpowiednią parą wartości krytycznych d_i^- i d_i^+. Wartości krytyczne d_i^- i d_i^+ leżą na dwóch równoległych odcinkach o współrzędnych $[(k, \pm b_{\alpha/2}), (n, \pm b_{\alpha/2}+1)]$ (por. wykres 2.2). W związku z tym $d_i^+ = b_{\alpha/2} + (i-k)/(n-k)$ i $d_i^- = -b_{\alpha/2} + (i-k)/(n-k)$. Tabela 2.1 zawiera wartości parametru $b_{\alpha/2}$, które zależą od liczby stopni swobody w modelu regresji $n-k$ i od przyjętego poziomu istotności α. Wartość b może być też dokładniej policzona ze wzoru (Edgerton, Wells, 1994):

$$b_{\alpha/2} = \frac{b_1}{[0{,}5(n-k)-1]^{1/2}} + \frac{b_2}{[0{,}5(n-k)-1]} + \frac{b_3}{[0{,}5(n-k)-1]^{3/2}} \qquad (2.6)$$

Tabela 2.1. Wartości parametru b do testu CUSUMSQ

Poziom istotności α	Liczba stopni swobody $(n-k)$ 61	100	200	500	1000	b_1	b_2	b_3
$\alpha = 0{,}005$	0,195	0,155	0,111	0,071	0,051	1,62762	-0,67037	-1,23659
$\alpha = 0{,}010$	0,125	0,100	0,104	0,066	0,047	1,51743	-0,67027	-1,08477
$\alpha = 0{,}025$	0,161	0,128	0,092	0,059	0,042	1,35810	-0,67012	-0,88587
$\alpha = 0{,}050$	0,144	0,115	0,083	0,053	0,038	1,22387	-0,67001	-0,73517
$\alpha = 0{,}100$	0,181	0,144	0,072	0,047	0,033	1,07298	-0,66989	-0,58165

Uwaga: parametry potrzebne do wyliczenia wartości krytycznych dla testu jednostronnego na podstawie pracy Edgerton, Wells (1994).

Przykład 2.6

Przeprowadźmy testy CUSUM i CUSUMSQ na modelu z przykładu 2.1 przy użyciu symulowanych danych. Wygenerujmy obserwacje zmiennych objaśniających i objaśnianej oraz wektor wartości parametrów.

```
X =[ones(100,1) randn(100,2)];  % stała i dwie zmienne generowane z N(0,1)
e = randn(100,1);               % wektor składników losowych z N(0,1)
alfa = [3; 2; 1];               % prawdziwe parametry modelu
y = X*alfa+e;                   % wartości y wygenerowane z modelu
```

Podobnie jak w przykładach 2.1 i 2.2 prawdziwy model jest liniowy i testy CUSUM i CUSUMSQ nie powinny dać podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej o stabilnych parametrach modelu w próbie. Do dalszych obliczeń potrzebne będą oceny parametrów oraz szacunek odchylenia standardowego składnika losowego.

```
[n, k]  = size(X);              % rozmiar próby i liczba parametrów
beta = X\y;                     % oszacowanie parametrów regresji
u = y - X*beta;                 % reszty z regresji
sigma = sqrt(u'*u/(n-k));       % odch. standard. składnika losowego
```

Kolejną częścią programu jest pętla, w której rekurencyjnie – przy wykorzystaniu powiększającego się okna estymacji – obliczane są prognozy zmiennej objaśnianej i wystandaryzowane błędy prognozy. W pętli obliczane są też kolejne wartości statystyk $CUSUM_i$ i $CUSUMSQ_i$.

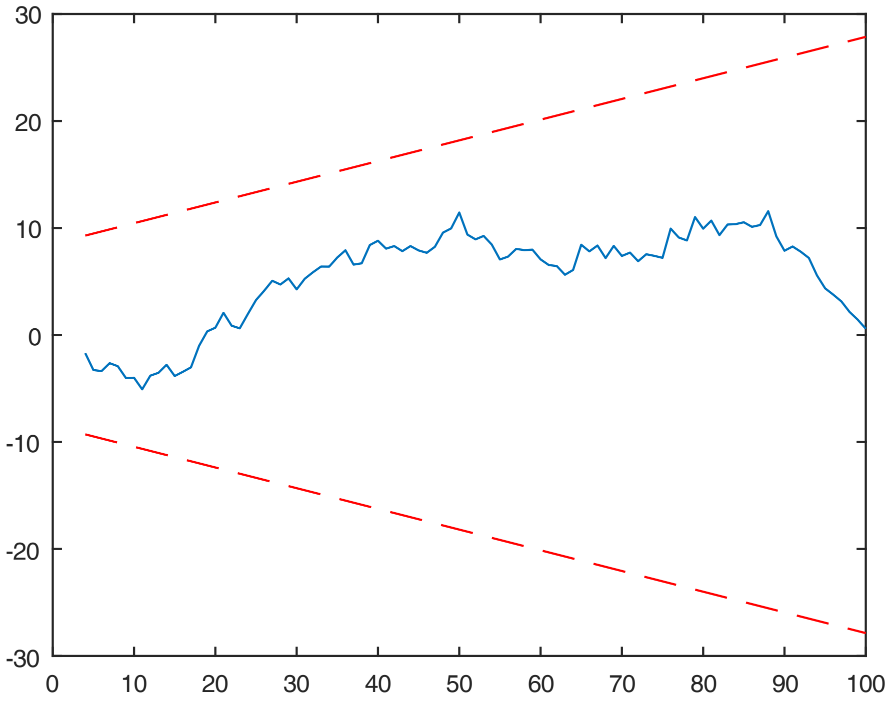
```
cusum   = zeros(n-1-k,1);       % zadeklarujmy wektor sum błędów prognozy
cusumsq = zeros(n-1-k,1);       % teraz wektor sum kwadratów błędów prognozy
for j=k:99
    Xj = X(1:j,:);              % obserwacje X z okna estymacji
    yj = y(1:j,1);              % obserwacje y z okna estymacji
    x1 = X(j+1,:);              % obserwacje X z okna prognozy
    y1 = y(j+1,1);              % obserwacje y z okna prognozy
    bj = Xj\yj;                 % oszacowanie parametrów regresji
    uj = yj - Xj*bj;            % reszty z modelu regresji
    yp = x1*bj;                 % prognozy na 1 okres do przodu
    iXX = 1 + x1*inv(Xj'*Xj)*x1';   % współczynnik skalujący błędy prognozy
    skala = sigma*sqrt(iXX);
    u1 = (y1 - yp)/skala;                % wystandaryzowane błędy prognozy
    cusum(j-k+2,1)  = u1+cusum(j-k+1,1); % zapisywanie rekurencyjne sum błędów
    cusumsq(j-k+2,1)= u1^2+cusumsq(j-k+1,1); % zapisywanie rekurencyjne błędów
end
cusumsq = cusumsq/cusumsq(end,1);   % unormowanie statystyki CUSUMSQ
```

Po realizacji tego programu wektory `cusum` i `cusumsq` zawierają wartości statystyk $CUSUM_i$ i $CUSUMSQ_i$. Można teraz nanieść wartości tych statystyk na dwa oddzielne wykresy i porównać je z wartościami krytycznymi. Potrzebne tutaj będzie wyznaczenie wartości b do policzenia wartości krytycznych dla testu CUSUMSQ.

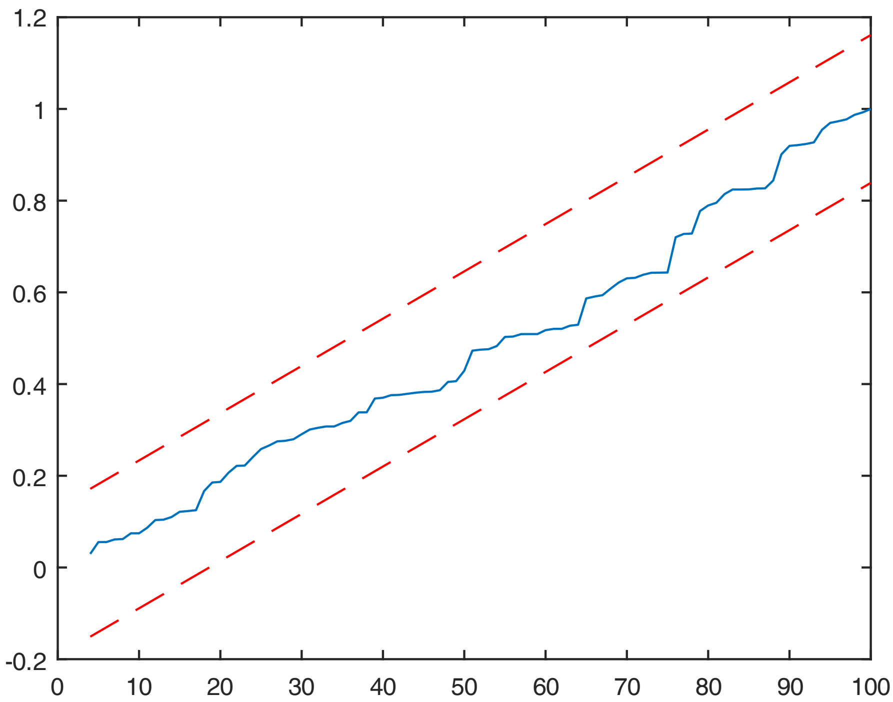
```
%obliczanie parametru b do testu CUSUMSQ dla poz. istotn. 0.05
b = 1.22387/sqrt(0.5*(n-k)-1) -0.67001/(0.5*(n-k)-1)...
    -0.73517/(0.5*(n-k)-1)^1.5;

h1 = figure();                  % tworzymy wykres dla statystyki CUSUM
plot(k+1:100,cusum(2:end,1));   % rysujemy wartości statystyki CUSUM
hold on;    % poniżej rysujemy wartości krytyczne dla tej statystyki
plot([k+1 n],[0.948*sqrt(n-k-1) 3*0.948*sqrt(n-k-1)],'r--')
plot([k+1 n],[-0.948*sqrt(n-k-1) -3*0.948*sqrt(n-k-1)],'r--')
hold off;
h2 = figure();                  % tworzymy wykres dla statystyki CUSUMSQ
plot(k+1:100,cusumsq(2:end,1)); % rysujemy wartości statystyki CUSUMSQ
hold on;    % poniżej rysujemy wartości krytyczne dla tej statystyki
plot([k+1 n],[b+(k+1-k)/(n-k) b+(n-k)/(n-k)],'r--')
plot([k+1 n],[-b+(k+1-k)/(n-k) -b+(n-k)/(n-k)],'r--')
hold off;
```

Przykładowe wyniki przedstawiono na wykresach 1 i 2.

Wykres 2.1. Przykładowa realizacja testu CUSUM w przykładzie 2.6



Wykres 2.2. Przykładowa realizacja testu CUSUMSQ w przykładzie 2.6



2.6. Rekursywne oszacowania parametrów

Sprawdzenie stabilności oszacowań parametrów w próbie może także polegać na sprawdzeniu, czy oszacowania danego parametru nie zmieniają się istotnie wraz z powiększaniem okna estymacji lub ewentualnie przy wykorzystaniu danych z innej podpróby przy przesunięciu okna estymacji. Warto wtedy analizować zmiany oszacowań parametrów wraz z odpowiadającymi im przedziałami ufności. Do wyznaczenia przedziału ufności dla wybranego parametru można wykorzystać wzór postaci

$$\beta \in \langle \hat{\beta} - S_\beta \cdot t_\alpha^* \, ; \, \hat{\beta} + S_\beta \cdot t_\alpha^* \rangle, \tag{2.7}$$

gdzie $\hat{\beta}$ oznacza oszacowanie parametru β w danym oknie estymacji, S_β oznacza błąd standardowy oszacowania parametru β, a t_α^* oznacza wartość krytyczną statystyki t przy poziomie istotności α w teście na istotność statystyczną zmiennej przy parametrze β. Dla 95% asymptotycznego przedziału ufności parametru β poziom istotności α równy jest 0,05, a wartość krytyczną przyjmuje się zwykle (ze standardowego rozkładu normalnego) równą 1,96. Należy jednak pamiętać, że analizy rekursywnych oszacowań parametrów nie mają formy testowania statystycznego, ale mają jedynie charakter poglądowy. Kolejne oszacowania parametru oraz statystyki w powiększającym się oknie estymacji nie są niezależne, dlatego trudno jest wyznaczyć prawdziwe wartości krytyczne dla takiej procedury testowej. Przydatność tej metody polega na tym, że pozwala ona często ocenić, w którym miejscu w próbie następuje ewentualna zmiana strukturalna w modelu (to znaczy zmiana wartości parametrów).

Przykład 2.7

Oszacujmy rekurencyjnie parametry modelu regresji na podstawie danych z przykładu 2.4. W modelu tym występuje zmiana strukturalna w okolicach 40. obserwacji i mamy nadzieję, że procedura szacowania rekursywnego pozwoli nam ją wychwycić. Dane do modelu generujemy wykorzystując następujący fragment kodu.

```
X =[ones(100,1) randn(100,2)];  % stała i dwie zmienne generowane z N(0,1)
e = randn(100,1);               % wektor składników losowych z N(0,1)
alfa1 = [3; 2; 1];              % parametry modelu dla pierwszej podpróby
alfa2 = [-1; -2; -3];           % parametry modelu dla drugiej podpróby
y(1:40,1) = X(1:40,:)*alfa1+e(1:40,1);       % wartości y dla 1. podpróby
y(41:100,1) = X(41:100,:)*alfa2+e(41:100,1); % wartości y dla 2. podpróby
```

W następnym kroku szacujemy parametry modelu, wykorzystując powiększające się okno estymacji.

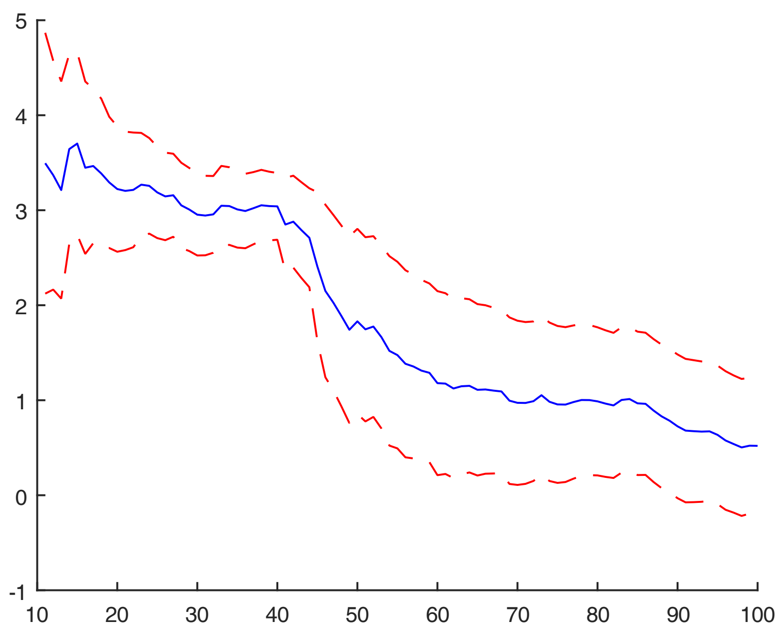
```
Beta = zeros(3,90);              % deklarujemy macierz rekurencyjnych oszacowań
S    = zeros(3,90);              % deklarujemy macierz śr. błędów szacunków
for i=11:100                     % pętla powiększająca okno estymacji
    Xi = X(1:i,:);               % macierz obserwacji zmiennych objaśniajaych
    yi = y(1:i,1);               % wektor obserwacji zmiennej objaśnianej
    Beta(:,i-10) = Xi\yi;        % oszacowania parametrów w danym oknie
    u = yi - Xi*Beta(:,i-10);
    sigma = u'*u/(i-3);
    S(:,i-10) = sqrt(diag(sigma*inv(Xi'*Xi)));
end
```

Wygodnie jest przedstawić oszacowania parametrów na wykresach.

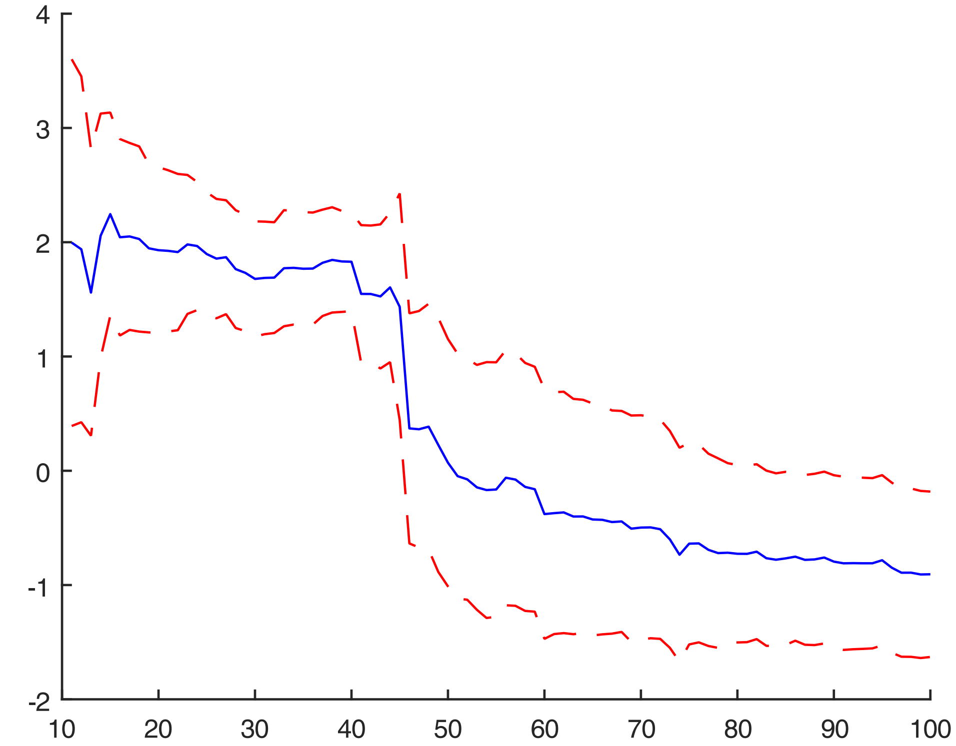
```
for j=1:3
    figure();
    hold on;
    plot([11:100]',Beta(j,:)','b-');
    plot([11:100]',Beta(j,:)'+S(j,:)'*1.96,'r--');
    plot([11:100]',Beta(j,:)'-S(j,:)'*1.96,'r--');
    hold off;
end
```

Wykresy 2.3, 2.4 i 2.5 zawierają oszacowania poszczególnych parametrów. Na każdym z trzech wykresów widać dużą zmianę wartości parametrów po 40. obserwacji, co pozwala wnioskować o wystąpieniu zmiany strukturalnej w próbie.

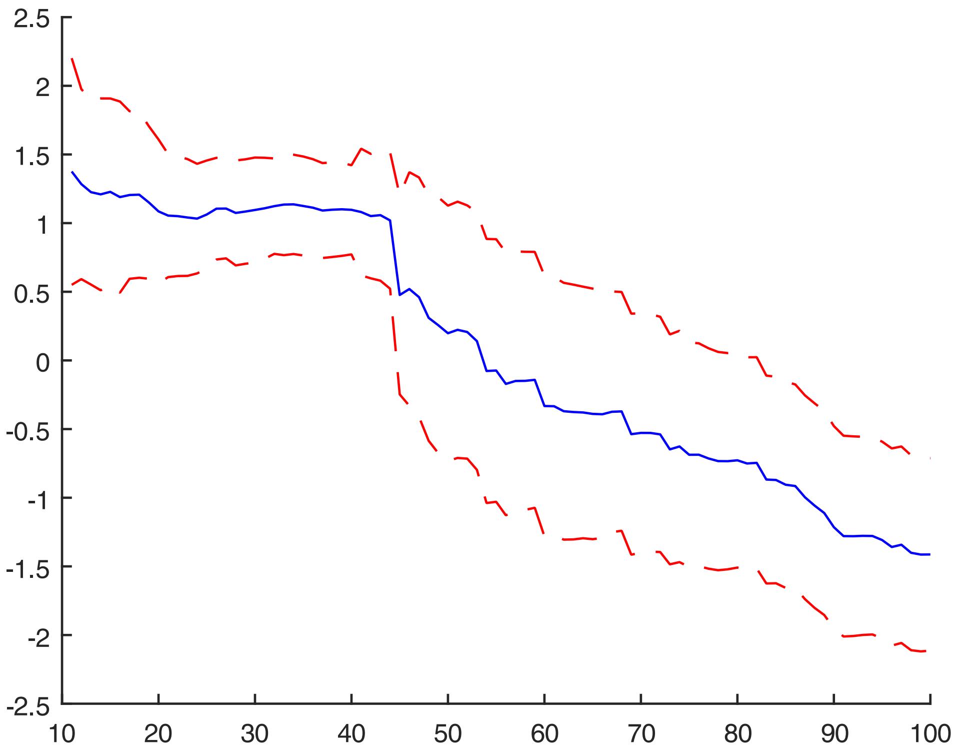
Wykres 2.3. Oszacowania pierwszego parametru regresji z przykładu 2.7



Wykres 2.3. Oszacowania drugiego parametru regresji z przykładu 2.7



Wykres 2.3. Oszacowania trzeciego parametru regresji z przykładu 2.7



Literatura

Andrews, D. (1993) Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point, Econometrica, 61 (4), 821-856.

Andrews, D. W. (2003). Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point: A Corrigendum. Econometrica, 71(1), 395-397.

Brown, R., Durbin J., Evans J. (1975) Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 35, 149-192.

Chow, G. (1960). Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions. Econometrica, 28 (3), 591-605.

Edgerton, D., Wells, C. (1994) Critical Values for the Cusumsq Statistic in Medium and Large Sized Samples, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 56 (3), 355-365.

Hansen, B. (1997) Approximate Asymptotic P Values for Structural-Change Tests, Journal of Business and Economic Statistics, 15, 60-67.

Johnston, J., DiNardo, J. (1997) Econometric Methods, wyd. 4, McGraw-Hill.

Ramsey, J. (1969). Tests for Specification Errors in Classical Linear Least-Squares Regression Analysis. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 31(2), 350-371.

Ramsey, J., Schmidt, P. (1976) Some Further Results on the Use of OLS and BLUS Residuals in Specification Error Tests, Journal of the American Statistical Association, 71(354), 389-390.

Quandt, R. (1960) Tests of Hypotheses that a Linear System Obeys Two Separate Regimes, Journal of the American Statistical Association, 55, 324-330.