Dobromił Serwa

Model przestrzeni stanów z efektem ARCH

Harvey, Ruiz i Sentana (1992) zaproponowali uogólnienie modelu przestrzeni stanów poprzez dodanie efektu ARCH do każdego z równań modelu. Składniki losowe w równaniach stanu i obserwacji nie mają tam stałej wariancji, gdyż wariancja jest uwarunkowana historyczną zmiennością składników losowych. Warunkowe rozkłady składników losowych, zależne od historycznej zmienności tych składników, są normalne. Harvey, Ruiz i Sentana przedstawili metodę *quasi*–największej wiarygodności (ang. *quasi*–maximum likelihood method) do oszacowania parametrów modelu.

W tym punkcie zaprezentowano model przestrzeni stanów z efektem ARCH, stanowiący uogólnienie modelu przestrzeni stanów, przy założeniu, że heteroskedastyczne składniki losowe są jednowymiarowe (tzn. są skalarami). Znaczy to między innymi, że heteroskedastyczne składniki losowe nie są ze sobą skorelowane. Harvey, Ruiz i Sentana zauważyli, że założenie to ułatwia przede wszystkim specyfikację modelu. Przy rezygnacji z takiego założenia, sygnał premii oraz parametry modelu szacowane byłyby w analogiczny sposób. Metodę estymacji prognoz wektora stanu oraz parametrów modelu zaprezentowano na podstawie pracy Kima i Nelsona (1999).

Model przestrzeni stanów z dodanym efektem ARCH składa się z dwóch równań:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{z}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Lambda}\varepsilon_t^* \tag{3.65}$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{F}\mathbf{z}_{t-1} + \boldsymbol{\upsilon}_t + \boldsymbol{\lambda}\upsilon_t^*, \tag{3.66}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0},\mathbf{R}), \qquad \boldsymbol{\upsilon}_t \sim N(\mathbf{0},\mathbf{Q}), \tag{3.67}$$

$\boldsymbol{\Lambda}$ i $\boldsymbol{\lambda}$ są wektorami o odpowiednich wymiarach, a ε_t^* i υ_t^* są jednowymiarowymi składnikami losowymi o następujących rozkładach, warunkowych ze względu na całą informację ψ dostępną w momencie t–1:

$$\varepsilon_t^* | \psi_{t-1} \sim N(0, h_{1t}), \qquad \upsilon_t^* | \psi_{t-1} \sim N(0, h_{2t}). \tag{3.68}$$

Dla uproszczenia założono, że wariancje h_{1t} i h_{2t} są generowane przez procesy ARCH(1):

$$h_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^*)^2, \qquad h_{2t} = \gamma_0 + \gamma_1 (\upsilon_{t-1}^*)^2. \tag{3.69}$$

Harvey, Ruiz i Sentana (1992) zaproponowali wstawienie obu heteroskedastycznych składników losowych ε_t^* i υ_t^* do równania stanu. Model przestrzeni stanów miałby wtedy postać:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + [\mathbf{B} \quad \mathbf{\Lambda} \quad \mathbf{0}]\mathbf{z}_t^* + \varepsilon_t \tag{3.70}$$

$$\mathbf{z}_t^* = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_t \\ \varepsilon_t^* \\ \upsilon_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{t-1} \\ \varepsilon_{t-1}^* \\ \upsilon_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\upsilon}_t \\ \varepsilon_t^* \\ \upsilon_t^* \end{bmatrix}, \tag{3.71}$$

czyli:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}^* \mathbf{z}_t^* + \varepsilon_t \qquad \text{(równanie obserwacji)} \tag{3.72}$$

$$\mathbf{z}_t^* = \mathbf{F}^* \mathbf{z}_{t-1}^* + \mathbf{G}^* \boldsymbol{\upsilon}_t^*, \qquad \text{(równanie stanu)} \tag{3.73}$$

gdzie:

$$E(\boldsymbol{\upsilon}_t^* \boldsymbol{\upsilon}_t^{*\prime} | \psi_{t-1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_{1t} & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & h_{2t} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_t^*. \tag{3.74}$$

Podobnie jak w standardowym modelu przestrzeni stanów, procedura szacowania wartości średniej $\mathbf{z}_{t|t-1}^*$ oraz wariancji $\mathbf{P}_{t|t-1}^*$ zmiennej losowej $\mathbf{z}_t^*$, warunkowej ze względu na całą informację ψ dostępną w momencie $t-1$, opisana jest za pomocą następujących formuł:

$$\mathbf{z}_{t|t-1}^* = \mathbf{F}^* \mathbf{z}_{t-1|t-1}^* \tag{3.75}$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1}^* = \mathbf{F}^* \mathbf{P}_{t-1|t-1}^* \mathbf{F}^{*\prime} + \mathbf{G}^* \mathbf{Q}_t^* \mathbf{G}^{*\prime}, \tag{3.76}$$

gdzie:

$$h_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 E[(\varepsilon_{t-1}^*)^2 | \psi_{t-1}], \qquad h_{2t} = \gamma_0 + \gamma_1 E[(\upsilon_{t-1}^*)^2 | \psi_{t-1}] \tag{3.77}$$

stanowią elementy macierzy $\mathbf{Q}_t^*$ w równaniu (3.76). Harvey, Ruiz i Sentana pokazali, że wyrażenia $E[(\varepsilon_{t-1}^*)^2|\psi_{t-1}]$ i $E[(\upsilon_{t-1}^*)^2|\psi_{t-1}]$ w (3.77) można zapisać jako:

$$E[(\varepsilon_{t-1}^*)^2|\psi_{t-1}] = E[\varepsilon_{t-1}^*|\psi_{t-1}]^2 + E[(\varepsilon_{t-1}^* - E(\varepsilon_{t-1}^*|\psi_{t-1}))^2], \tag{3.78}$$

$$E[(\upsilon_{t-1}^*)^2|\psi_{t-1}] = E[\upsilon_{t-1}^*|\psi_{t-1}]^2 + E[(\upsilon_{t-1}^* - E(\upsilon_{t-1}^*|\psi_{t-1}))^2]. \tag{3.79}$$

Wyrażenia $E[\varepsilon_{t-1}^*|\psi_{t-1}]$ i $E[\upsilon_{t-1}^*|\psi_{t-1}]$ stanowią dwa ostatnie elementy wektora $\mathbf{z}_{t-1|t-1}^*$, a wyrażenia $E[(\varepsilon_{t-1}^* - E(\varepsilon_{t-1}^*|\psi_{t-1}))^2]$ i $E[(\upsilon_{t-1}^* - E(\upsilon_{t-1}^*|\psi_{t-1}))^2]$ otrzymuje się z dwóch ostatnich diagonalnych elementów macierzy $\mathbf{P}_{t-1|t-1}^*$.

Błąd prognozy wartości wektora $\mathbf{y}_t$, $\xi_{t|t-1}^*$, oraz jego wariancja $\mathbf{M}_{t|t-1}^*$ obliczane są ze wzorów:

$$\xi_{t|t-1}^* = \mathbf{y}_t - \mathbf{A}\mathbf{x}_t - \mathbf{B}^*\mathbf{z}_{t|t-1}^* , \tag{3.80}$$

$$\mathbf{M}_{t|t-1}^* = \mathbf{B}^*\mathbf{P}_{t|t-1}^*\mathbf{B}^{*\prime} + \mathbf{R} . \tag{3.81}$$

Prognozy $\mathbf{z}_{t|t-1}^*$ i $\mathbf{P}_{t|t-1}^*$ można uaktualnić w momencie *t*, obliczając wyrażenia $\mathbf{z}_{t|t}^*$ i $\mathbf{P}_{t|t}^*$ dane wzorami:

$$\mathbf{z}_{t|t}^* = \mathbf{z}_{t|t-1}^* + \mathbf{P}_{t|t-1}^*\mathbf{B}^{*\prime}(\mathbf{M}_{t|t-1}^*)^{-1}\xi_{t|t-1}^*, \tag{3.82}$$

$$\mathbf{P}_{t|t}^* = \mathbf{P}_{t|t-1}^*\mathbf{B}^{*\prime}(\mathbf{M}_{t|t-1}^*)^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}_{t|t-1}^* . \tag{3.83}$$

W modelu przestrzeni stanów, także z efektem ARCH, wartości parametrów szacowane są jednocześnie z dokonywaniem prognoz wektora stanu w całej próbie. Przybliżona wartość funkcji wiarygodności ma tu postać:

$$\ln L = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\left[(2\pi)^n \cdot \left|M_{t|t-1}^*\right|\right] - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\xi_{t|t-1}^*)'(\mathbf{M}_{t|t-1}^*)^{-1}\xi_{t|t-1}^* . \tag{3.84}$$

Wartość tej funkcji jest maksymalizowana w celu otrzymania ocen wartości parametrów oraz prognoz wektora stanu i wektora obserwacji.